zu Kap. 6.4: Elastische Zweikörperstöße

allgemeiner Fall: $m_1 \neq m_2$

Energiesatz:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{'2} \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p_1}^{\,2}}{m_1} + \frac{\vec{p_2}^{\,2}}{m_2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p_1}^{\,'2}}{m_1} + \frac{\vec{p_2}^{\,'2}}{m_2}\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Impulssatz:

$$
\begin{aligned}
\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} &= \vec{p_1}^{\,'} + \vec{p_2}^{\,'} = \vec{p}^{\,'} \\
m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} &= m_1\vec{v_1}^{\,'} + m_2\vec{v_2}^{\,'} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Für den 1-dimensionalen Fall gilt:

$$
\begin{aligned}
(2) \Rightarrow \qquad m_1(v_1 - v_1^{'}) &= m_2(v_2^{'} - v_2) \qquad (3) \\
(1) \Rightarrow \qquad m_1(v_1^2 - v_1^{'2}) &= m_2(v_2^{'2} - v_2^2) \qquad (4) \\
m_1(v_1 - v_1^{'})(v_1 + v_1^{'}) &= m_2(v_2^{'} - v_2)(v_2^{'} + v_2) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Division von (5) durch (3):

$$
\Rightarrow \qquad v_1 + v_1^{'} = v_2 + v_2^{'} \qquad (6)
$$

$$
\text{oder:} \quad \boxed{v_1 - v_2 = v_2^{'} - v_1^{'}}
$$

d.h. die Relativgeschwindigkeiten der beiden Massen vor und nach dem Stoß sind gleich!

Impulsgleichung (3):

$$m_1(v_1 - v_1^{'}) = m_2(v_2^{'} - v_2) \tag{7}$$

und (6):

$$v_1 + v_1^{'} = v_2^{'} + v_2 \tag{8}$$

Lösen dieses Gleichungssystems liefert:

$$\Rightarrow \begin{aligned} v_1^{'} &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2 \\ v_2^{'} &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} v_2 \end{aligned}$$

<u>Besondere Fälle:</u>

(a) Man betrachte den Fall gleicher Massen: $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1^{'} &= v_2 \\ v_2^{'} &= v_1 \end{aligned}$$

Die Teilchen tauschen ihre kinetischen Energien aus;
(Beispiel: Pendelkette)

(b) Man betrachte den Fall, dass das zweite Teilchen ruht: $v_2 = 0$
Dann ergibt sich aus den oben angegebenen Lösungen:

$$\begin{aligned} v_1^{'} &= \tfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2^{'} &= \tfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten nach dem Stoß erhält man:

$$\frac{v_1^{'}}{v_2^{'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)$$

- Für den Fall gleicher Massen, $m_1 = m_2$, ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1' &= 0 \\ v_2' &= v_1 \end{aligned}$$

  Nach dem Stoß ist Teilchen 1 in Ruhe, Teilchen 2 bewegt sich mit Geschwindigkeit v_1

- Für $m_2 \gg m_1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1' &\approx -v_1 \\ v_2' &\approx 0 \end{aligned}$$

  - Das leichte Teilchen wird reflektiert, die kinetische Energie von Teilchen 1 bleibt erhalten. Der Energieübertrag ist wegen $|v_1'| \approx |v_1|$ klein und ergibt sich als $\Delta E = \frac{1}{2} m_1 (v_1'^2 - v_1^2)$.
  - Das massive Teilchen bleibt nahezu in Ruhe. Der Impulsübertrag auf das massive Teilchen beträgt $|2 \cdot \vec{p}_1|$ (wg. Impulsumkehr).

- Für $m_2 \ll m_1$, d.h. eine dicke Kugel stößt gegen eine ruhende kleine Kugel, erhält man:

$$\begin{aligned} v_1' &\approx v_1 \\ v_2' &\approx 2v_1 \end{aligned}$$

  - Das massive Teilchen bewegt sich mit seiner ursprünglichen Geschwindigkeit weiter.
  - Das leichte Teilchen bewegt sich doppelt so schnell.