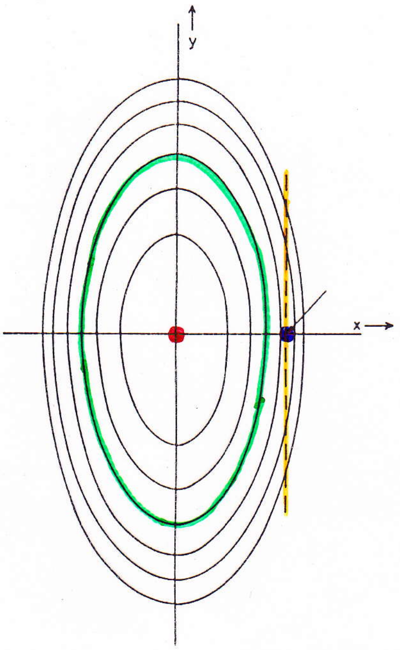
Konturlinien für die Gaußverteilung in zwei Dimensionen

– Kovarianzellipsen –



unabhängige Variablen x,y

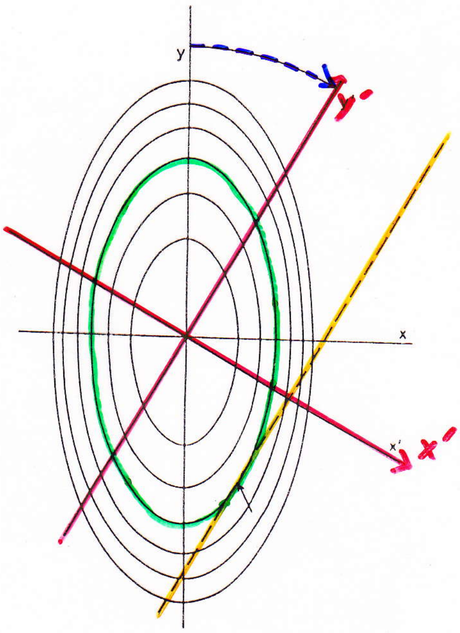
- $P_{max} = P(0,0)$

— $$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = 1$$

W'keit $= P(0,0) / \sqrt{e} = 0.607 \cdot P(0,0)$

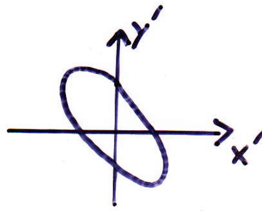
- Für alle x' gilt:

  $\max P(x',y) = P(x',y)\Big|_{y=0}$



Übergang zu abhängigen Variablen x', y' (z.B. durch Rotation)

↳ Korrelationen



- Für $\tilde{x} > 0$ gilt:

  $\max P(\tilde{x},y') = P(\tilde{x},\tilde{y})$

  $\boxed{\tilde{y} < 0}$

  Für $\tilde{x} < 0$ gilt

  $\max P(\tilde{x},y') = P(\tilde{x},\tilde{y})$

  $\boxed{\tilde{y} > 0}$

↳ neg. Korrelation

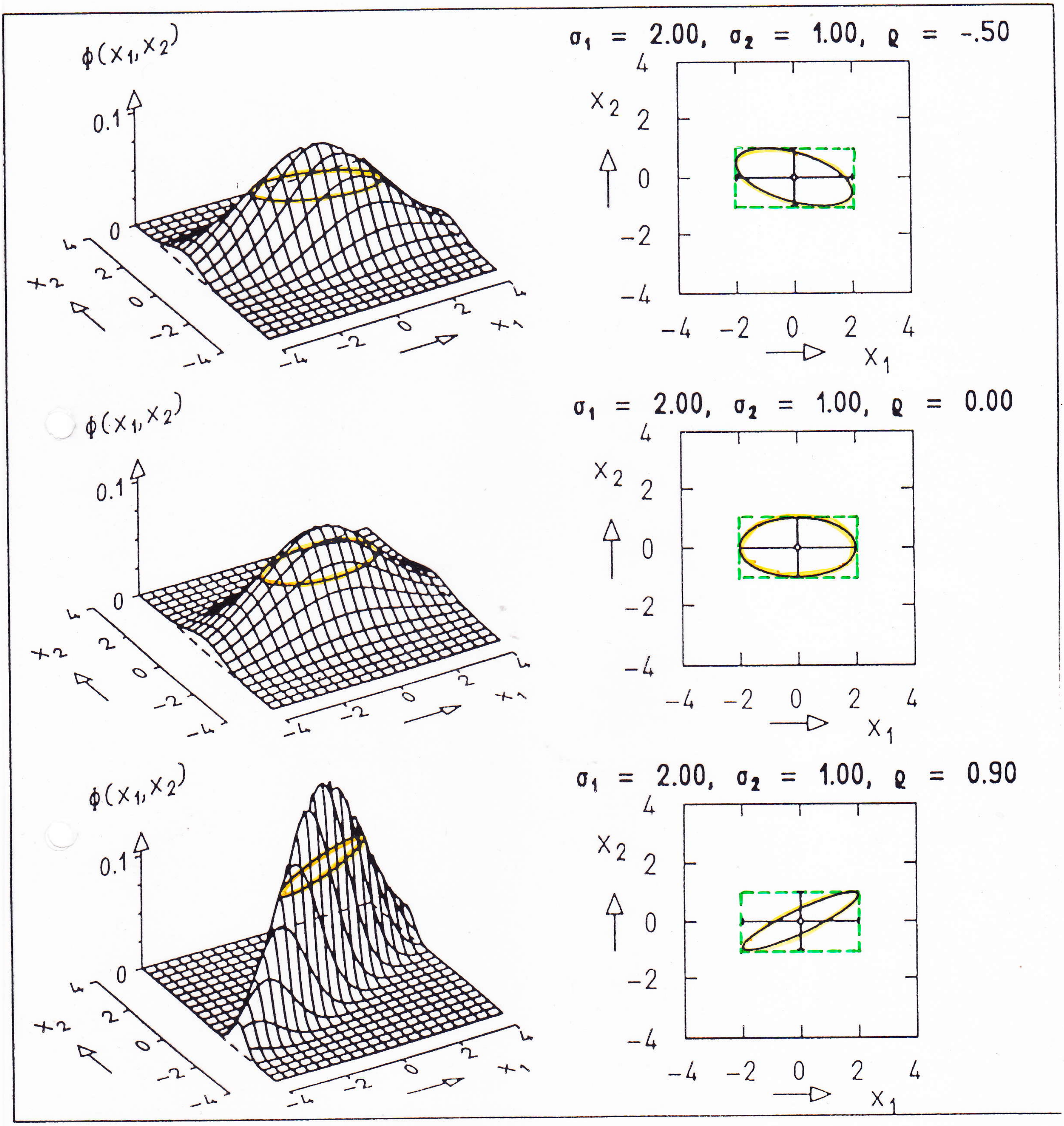
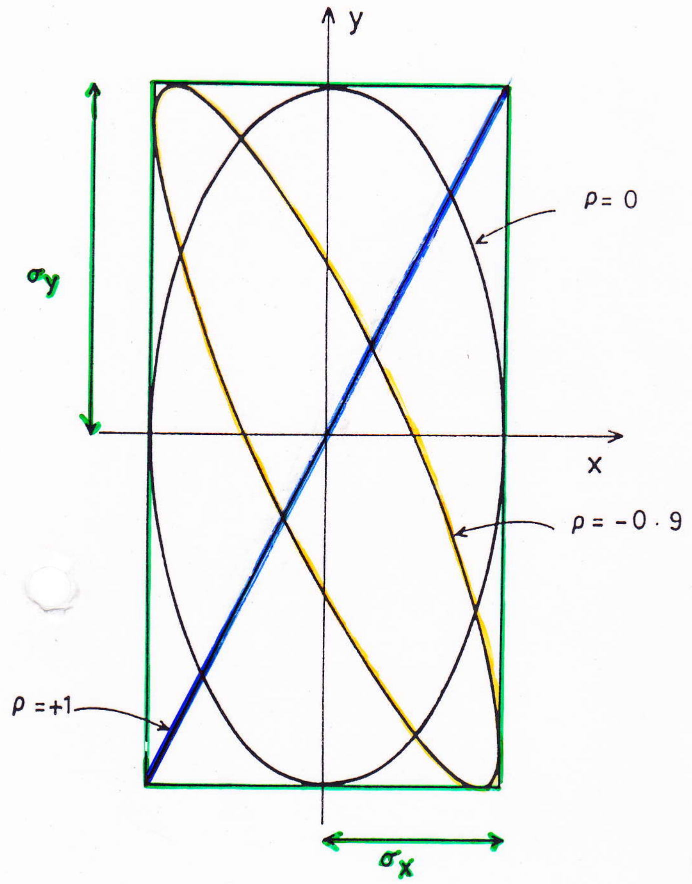


Bild 5.12: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Gauß-Verteilung zweier Variabler (links) und zugehörige Kovarianzellipse (rechts). Die drei Zeilen des Bildes unterscheiden sich nur durch den Zahlwert des Korrelationskoeffizienten ρ.

Horizontalschnitte durch W'keitsdichte → konzentrische Ellipsen
Vertikalschnitte durch (0,0) → Gauß-Verteilungen

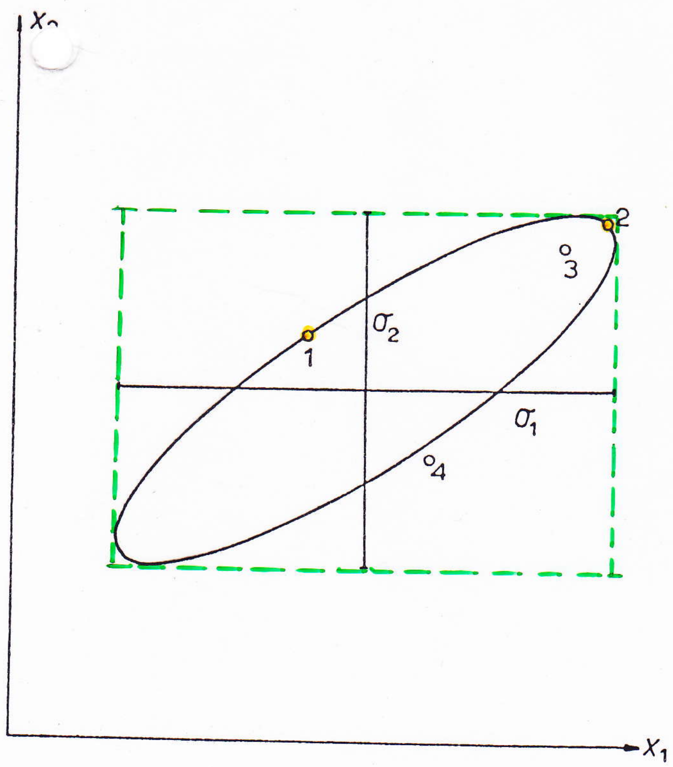


σ_x, σ_y = const

Variation von ρ

Neigungswinkel ϕ:

$$\tan 2\phi = \frac{2 \cdot \rho\, \sigma_x \cdot \sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$



Wahrscheinlichkeits-Relationen

$$P(1) = P(2) = \frac{P_{max}}{\sqrt{e}}$$

$$P(3) > P(1)$$

$$P(4) < P(1)$$

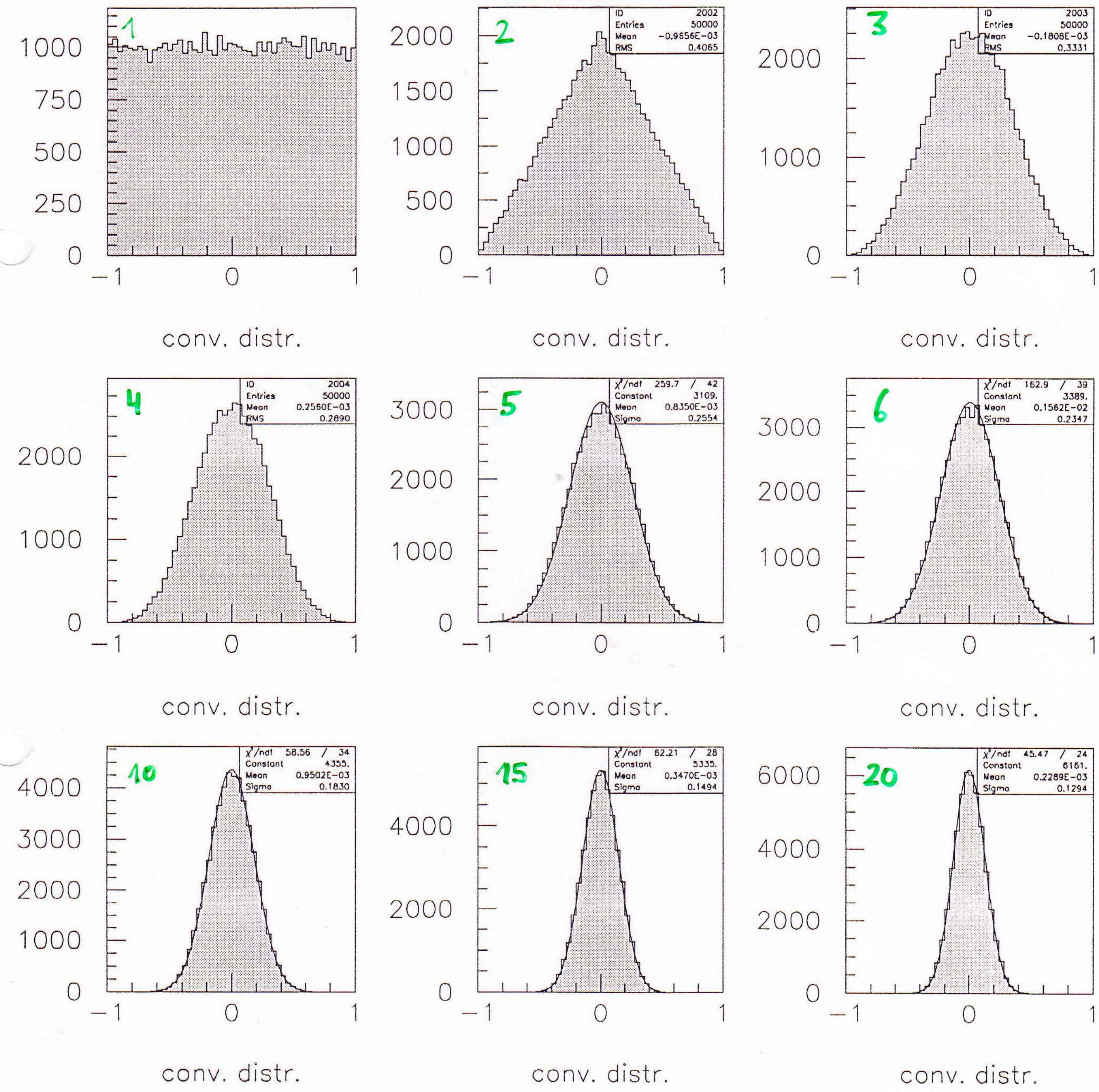
Linien gleicher W'keit
= Ellipsen, konzentrisch um Kovarianzellipse

innerhalb: größere W'keit
außerhalb: kleinere W'keit

W'keit einen Wert (x,y) innerhalb der Kovarianzellipse zu beobachten:

$$\int_A P(x,y)\, dx\, dy = 1 - e^{-1/2} = \underline{\underline{0.393}}$$

Beispiel: Faltung von Gleichverteilungen



n = Zahl der Zufallszahlen

$$\sigma_{theo} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = 0.577$$

n	$\sigma_{theo}/\sqrt{n}$	Gauß - σ
5	0.258	0.255
10	0.183	0.183
15	0.149	0.149
20	0.129	0.129

Verteilung der Augenzahl für n-Würfel

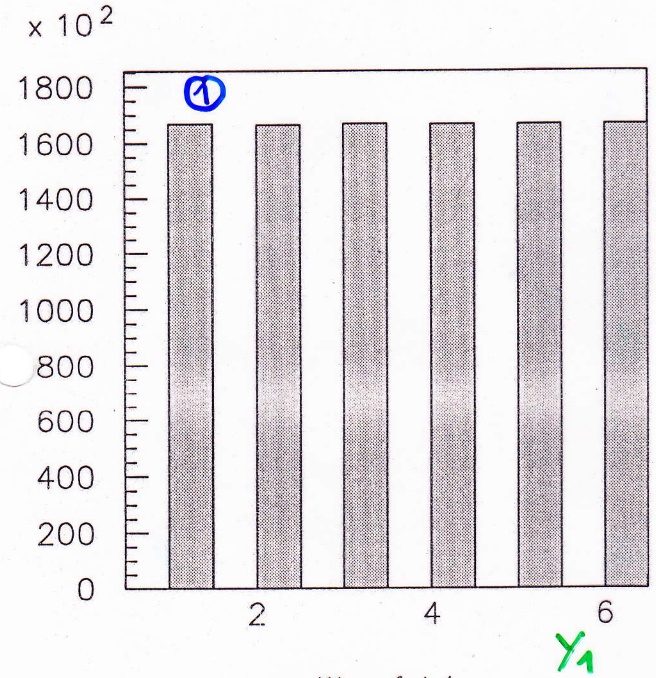
$x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$Y_1 = x_1$

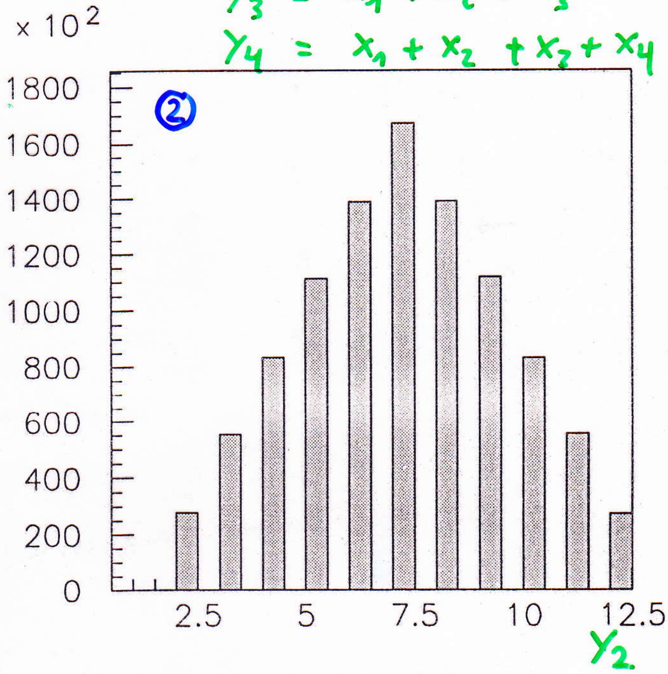
$Y_2 = x_1 + x_2$

$Y_3 = x_1 + x_2 + x_3$

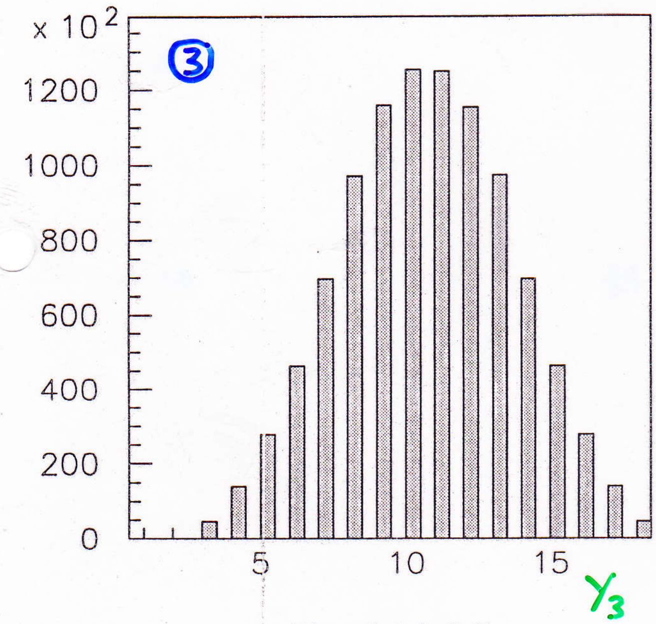
$Y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$



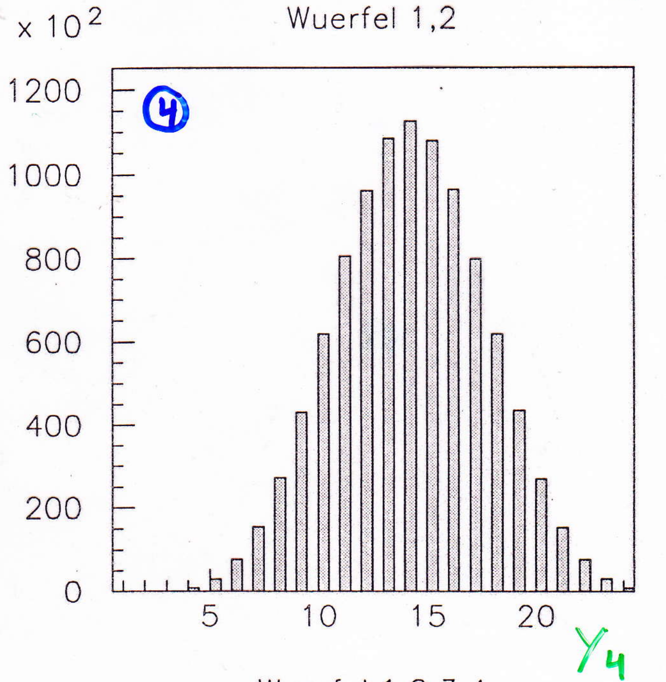
Wuerfel 1



Wuerfel 1,2

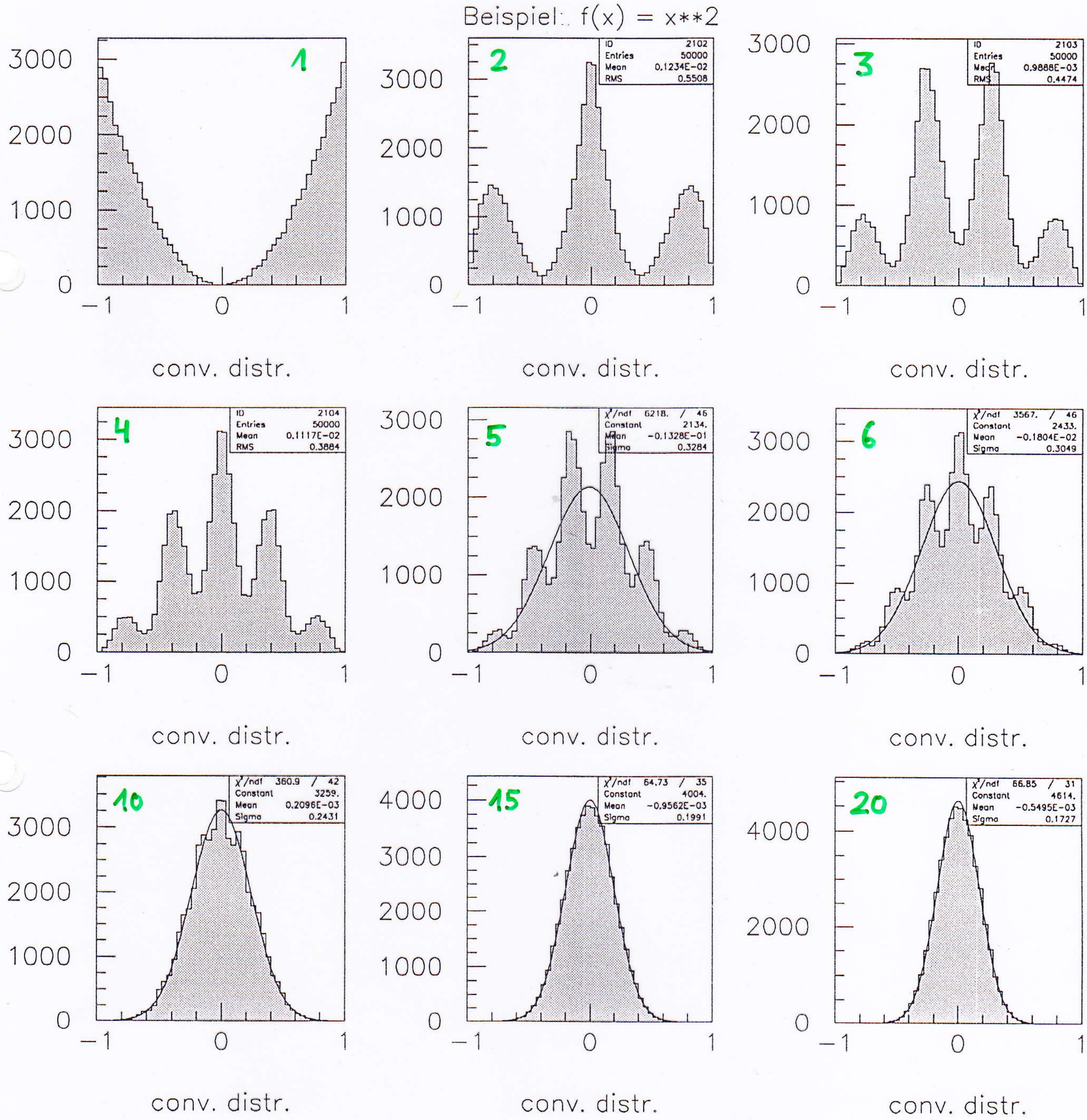


Wuerfel 1,2,3

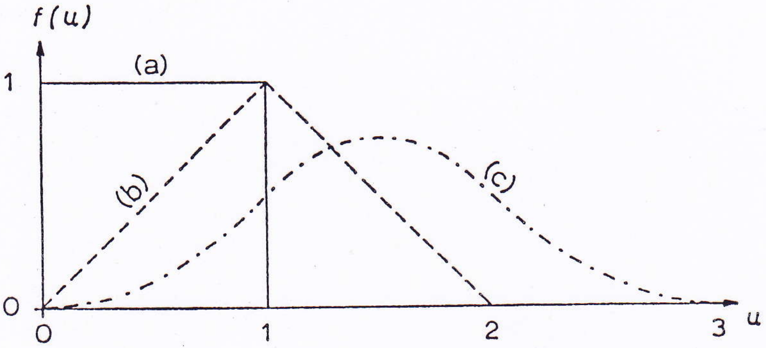


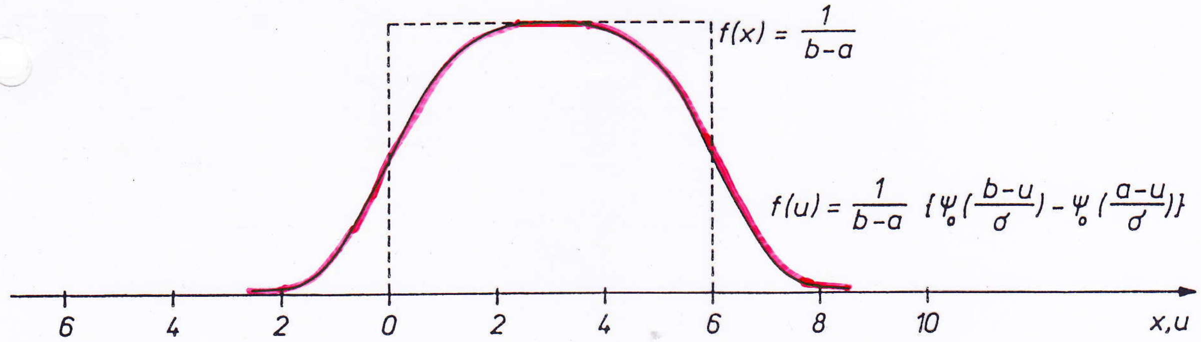
Wuerfel 1,2,3,4

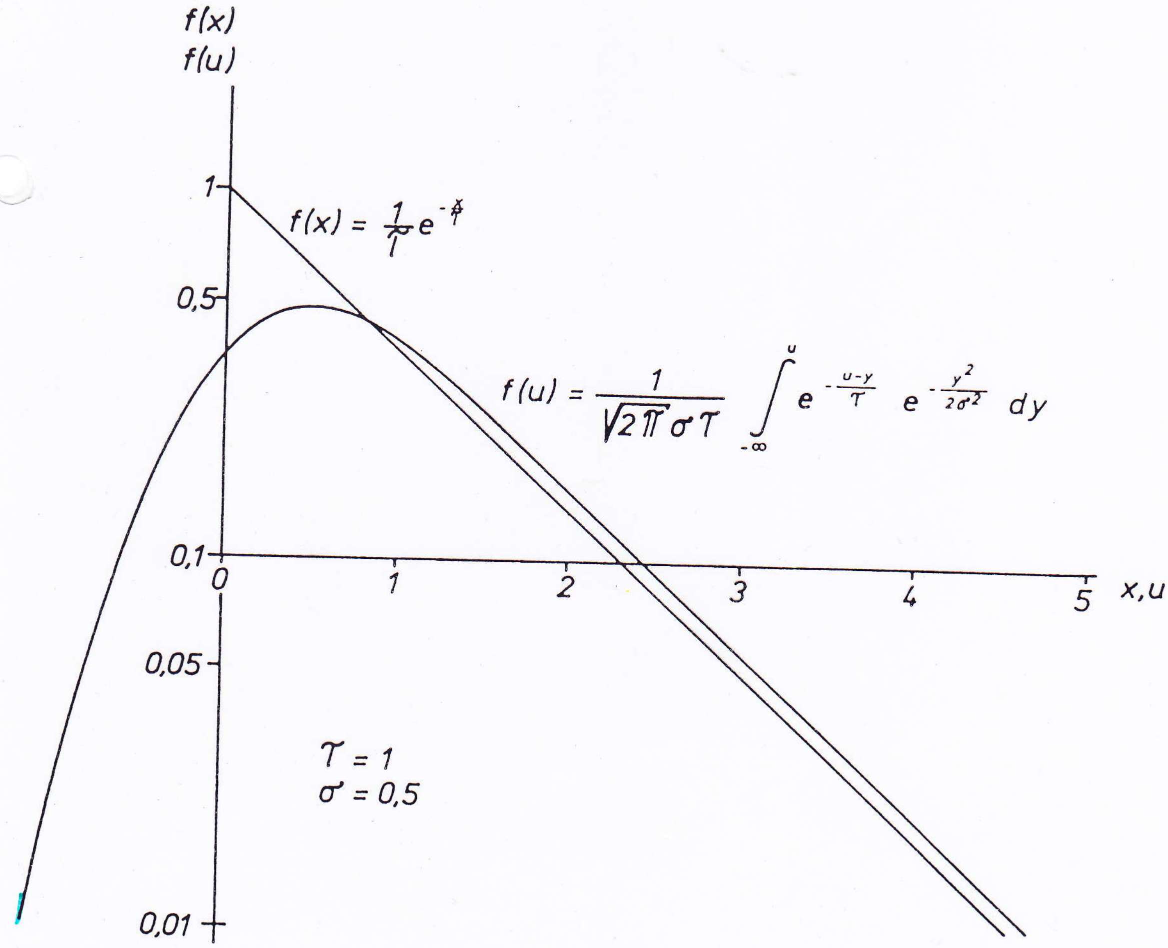
n Zufallszahlen aus einer $f(x) = x^2$ - Verteilung



n = Zahl der Zufallszahlen


f(u)
(a)
(b)
(c)
1
0
0
1
2
3
u


$f(x) = \frac{1}{b-a}$
$f(u) = \frac{1}{b-a} \{\psi_0(\frac{b-u}{\sigma}) - \psi_0(\frac{a-u}{\sigma})\}$
6
4
2
0
2
4
6
8
10
x,u


f(x)
f(u)
1
0,5
0,1
0,05
0,01
$f(x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}$
$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\tau} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u-y}{\tau}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$
0
1
2
3
4
5
x,u
$\tau = 1$
$\sigma = 0,5$