1.5 Relativistische Kinematik

1.5.1 Lorentz-Transformation

Grundlage: Spezielle Relativitätstheorie
→ In jedem Inertialsystem gelten die gleichen physikalischen Gesetze;

Inertialsystem: System in dem das 1. Newtonsche Gesetz (Trägheitsgesetz) gilt

Betrachte zwei Inertialsysteme S und S´, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v zueinander bewegen (o.b.d.A: Bewegung in x-Richtung)

Übergang zwischen Bezugssystemen wird durch die Lorentz-Transformation beschrieben:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma \cdot (x - v \cdot t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} \cdot x\right) \end{aligned}}$$

wobei:

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Inverse Transformation:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma \cdot (x' + v \cdot t') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'\right) \end{aligned}}$$

Konsequenzen aus der Lorentz-Transformation

(i) Relativität der Gleichzeitigkeit

(ii) Längenkontraktion

(iii) Zeitdilatation

(iv) Nicht-lineare Addition von Geschwindigkeiten

(i) Relativität der Gleichzeitigkeit

- *Gleichzeitigkeit* hängt von der Bewegung der Bezugssysteme ab;
- Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, sind im anderen Bezugssystem nicht gleichzeitig
- Zwei gleichzeitige Ereignisse in S: t, x_A, y, z
  t, x_B, y, z
- Für die Zeiten t‘ für die Ereignisse A und B ergibt sich im System S‘:

$$t'_A = \gamma \cdot (t - \frac{v}{c^2} \cdot x_A)$$

$$t'_B = \gamma \cdot (t - \frac{v}{c^2} \cdot x_B)$$

- Hieraus ergibt sich:

$$\boxed{t'_A = t'_B + \gamma \cdot \frac{v}{c^2} \cdot (x_B - x_A)}$$

(ii) Längenkontraktion

- Betrachte einen Stab der Länge L´ im System S´
  (Das System S´ sei das Ruhesystem des Stabes)

- $L' = x_2' - x_1'$

- Betrachte die Koordinaten, und damit die Länge des Stabes im System S:

$$x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} x_1' &= \gamma x_1 - \gamma v \cdot t \\ x_2' &= \gamma x_2 - \gamma v \cdot t \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich

$$\boxed{L = x_2 - x_1 = \frac{x_2'}{\gamma} - \frac{x_1'}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1') = \frac{L'}{\gamma}}$$

→ Das bewegte Objekt erscheint um einen Faktor γ in der Länge verkürzt, bezogen auf das Ruhesystem des Objekts

(iii) Zeitdilatation

- Eine Uhr in dem bewegten System laufe für einen Zeitraum T´; Welches Zeitintervall ergibt die Messung im System S?

- o.B.d.A: $t_1' = 0$ bis $t_2' = T'$ $\Delta t' = T'$
  Uhr sei im Ursprung von S´, d.h. $x' = 0$

- Lorentztransformation: $\boxed{t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right)}$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \gamma \cdot \left(0 + \frac{v}{c^2} \cdot 0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = \gamma \cdot \left(T' + \frac{v}{c^2} \cdot 0\right) = \gamma \cdot T'$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \cdot T'}$$

→ Die Uhr im System S durchläuft ein um den Faktor γ längeres Zeitintervall, oder: „bewegte Uhren gehen langsamer“

Wichtig für die Teilchenphysik: Zeitdilatation relativistischer Teilchen

(iv) Nicht-lineare Addition von Geschwindigkeiten

- Ein Teilchen bewege sich mit der Geschwindigkeit u´ relativ zu S´ in x´-Richtung; Welche Geschwindigkeit u hat es im Bezugssystem S?

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = u = \frac{\gamma(\Delta x' + v \cdot \Delta t')}{\gamma(\Delta t' + {}^{v}\!/_{c^2} \cdot \Delta x')} = \frac{{}^{\Delta x'}\!/_{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\Delta x'}{\Delta t'}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}}}$$

klassisch: $u = u' + v$

relativistische Korrektur: $k := \frac{1}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}}$

- Spezialfälle: $u' = c \quad \rightarrow \quad u = \frac{c+v}{1+{}^{v}\!/_{c}} = c \cdot \frac{1+{}^{v}\!/_{c}}{1+{}^{v}\!/_{c}} = c$

$$\left.\begin{array}{l} v = c \\ u' = c \end{array}\right\} \rightarrow \quad u = c \cdot \frac{2}{2} = c$$

→ Die Lichtgeschwindigkeit stellt in allen Inertialsystemen die maximale Geschwindigkeit dar.

1.5.2 Vierervektoren

(i) Orts- und Zeit-Vektor:

Die Lorentz-Transformation koppelt Orts- und Zeitkoordinaten, Zusammenfassung der vier Koordinaten in einen Raum-Zeit-Vektor:

$$x^\mu := \begin{pmatrix} c\cdot t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x^0 &= c\cdot t \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned}$$

Transformation:

$$\boxed{\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta\cdot x^1) \\ x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta\cdot x^0) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \qquad \text{wobei} \quad \beta := \frac{v}{c}}$$

Explizite Rechnung für $x^{0'}$

$$\begin{aligned} x^{0'} = (c\cdot t') &= c\cdot\gamma\cdot(t - \tfrac{v}{c^2}x^1) \\ &= \gamma\cdot(c\cdot t - \tfrac{v}{c}\cdot x^1) \\ &= \gamma\cdot(x^0 - \beta\cdot x^1) \end{aligned}$$

Kompakte Schreibweise:
(Einstein'sche Summenkonvention)

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu \cdot x^\nu = \quad \Lambda^\mu_\nu \cdot x^\nu \quad (\mu = 0,1,2,3)$$

wobei:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vierervektor a^μ : Vier-komponentiges Objekt, das sich in derselben Weise wie x^μ transformiert

$$\boxed{a^{\mu'} = \Lambda^\mu_\nu a^\nu}$$

wobei Λ die Lorentz-Transformationsmatrix darstellt

- Skalarprodukt von Vierervektoren:

$$a^\mu \cdot b_\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \qquad \boxed{\Leftrightarrow \quad a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}}$$

- Beträge von Vierervektoren: $a^2 := a \cdot a = (a^0)^2 - \vec{a} \cdot \vec{a}$

$$\begin{array}{lll} a^2 > 0 & a^\mu & \text{zeitartig} \\ a^2 < 0 & a^\mu & \text{raumartig} \\ a^2 = 0 & a^\mu & \text{lichtartig} \end{array}$$

- Lorentz-Invarianten: Kombinationen von Koordinaten, die invariant unter Lorentz-Transformationen sind

Beispiel:

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$
$$= (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2$$

(Analog zur Invarianz von $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ im 3-dimensionalen Raum unter Rotationen)

Metrik:

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad I = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$
$$= x_\nu \cdot x^\nu$$

wobei $x_\mu := g_{\mu\nu} x^\nu$ kovarianter Vektor

kontravariant: (x^0, x^1, x^2, x^3)

kovariant: $(x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

Übergang: kovariant ← → kontravariant

$$x_\mu = g_{\mu\nu} \cdot x^\nu$$
$$x^\mu = g^{\mu\nu} \cdot x_\nu$$
$$g^{\mu\nu} = (G)^{-1} = g_{\mu\nu} \quad \text{(Diagonalform)}$$

1.5.3 Tensoren

- Verallgemeinerung von Vierervektoren
- Ein Tensor n-ter Stufe $S^{\mu\nu\,\ldots\tau}$ (n Indices) transformiert sich mit n Λ-Matrizen

Tensor 0. Stufe: Skalar
Tensor 1. Stufe: Vierervektor
Tensor 2. Stufe: 16-komponentiges Objekt $S^{\mu\nu}$

Transformation: $$\boxed{S^{\mu\nu\,'} = \Lambda^{\mu}_{k} \cdot \Lambda^{\nu}_{\sigma} \cdot S^{k\sigma}}$$

Tensor 3. Stufe: 64-komponentiges Objekt $T^{\mu\nu\lambda}$

Transformation: $$\boxed{T^{\mu\nu\lambda\,'} = \Lambda^{\mu}_{k} \cdot \Lambda^{\nu}_{\sigma} \cdot \Lambda^{\lambda}_{\tau} \cdot T^{k\sigma\tau}}$$

- Konstruktion von *kovarianten* und *gemischten* Tensoren:

$$S^{\mu}_{\nu} := g_{\nu\lambda} \cdot S^{\mu\lambda}$$

$$S_{\mu\nu} := g_{\mu k} \cdot g_{\nu\lambda} \cdot S^{k\lambda}$$

(Das Produkt zweier Tensoren ist wieder ein Tensor)

1.5.4 Energie-Impuls Vektor

- Die relativistische Energie und der Dreierimpuls bilden einen Vierervektor

$$P^{\mu} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot m \cdot c \\ \gamma \cdot m \cdot \vec{v} \end{pmatrix}$$

- Relativistische Invariante:

$$\begin{aligned} P_{\mu} \cdot P^{\mu} &= \tfrac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^{\,2} \\ &= \gamma^2 m^2 c^2 (1 - \tfrac{v^2}{c^2}) \\ &= \gamma^2 m^2 c^2 \tfrac{1}{\gamma^2} = m^2 c^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

- Energie-Term: $$E = \gamma \cdot mc^2 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

- Näherung für kleine Werte von v/c: $$E = mc^2 \left\{1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right\}$$ $$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

- Relativistische Energie/Impulsbeziehungen: $$\vec{p} = \gamma \cdot m \cdot \vec{v}$$ $$E = \gamma \cdot m \cdot c^2$$

$$\boxed{\gamma = \frac{E}{mc^2}} \qquad \boxed{\beta = \frac{v}{c} = \frac{p \cdot c}{E}}$$

Beispiel: Proton E = 10 GeV

$$\gamma = \frac{10\,\text{GeV}}{0.938\,\text{GeV}} = 10.66$$

$$\beta = \frac{\sqrt{10^2 - 0.938^2}}{10} = 0.996$$