

Experimentalphysik V - Kern- und Teilchenphysik Vorlesungsmitschrift

Dozent: Prof. K. Jakobs

Verfasser: Ralf Gugel

13. Januar 2013

3. Zerfälle instabiler Kerne

3.1 Das Zerfallsgesetz

Historisch wurden verschiedene Strahlungsarten gefunden: α , β , γ . Die ersten beiden Strahlungsarten konnten durch ihre Ladung (Ablenkung im E - bzw. B -Feld) von der γ -Strahlung unterschieden werden. Auf Grund der unterschiedlichen Ladung ($+2e$ bzw. $-e$) sowie der unterschiedlichen Reichweite wiederum konnte zwischen α - und β -Strahlung unterschieden werden. Instabile Kerne umfassen

- Kerne im Grundzustand, die sich durch Teilchenemission (α , β , Spaltung) *spontan* in andere Kerne umwandeln
- Kerne im angeregten Zustand, die durch elektromagnetische Wechselwirkung in den Grundzustand übergehen

Damit solche Übergänge spontan statt finden, müssen sie energetisch möglich sein. Ein Beispiel für ein Termschema ist in Abb. 3.1 zu sehen.

Grund für das Auftreten dieser Strahlungsarten ist, dass Kerne sich spontan umwandeln können. Die Übergangswahrscheinlichkeit kann quantenmechanisch berechnet werden:

$$\lambda \sim |\langle \psi_f | \mathcal{O} | \psi_i \rangle|^2 \quad (3.1)$$

beschreibt die Übergangsamplitude. \mathcal{O} ist hierbei der Wechselwirkungs-Operator, ψ_i bzw. ψ_f die Wellenfunktion des Anfangs- bzw. Endzustands.

Für eine Probe mit N Kernen ist die Aktivität A definiert als die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit:

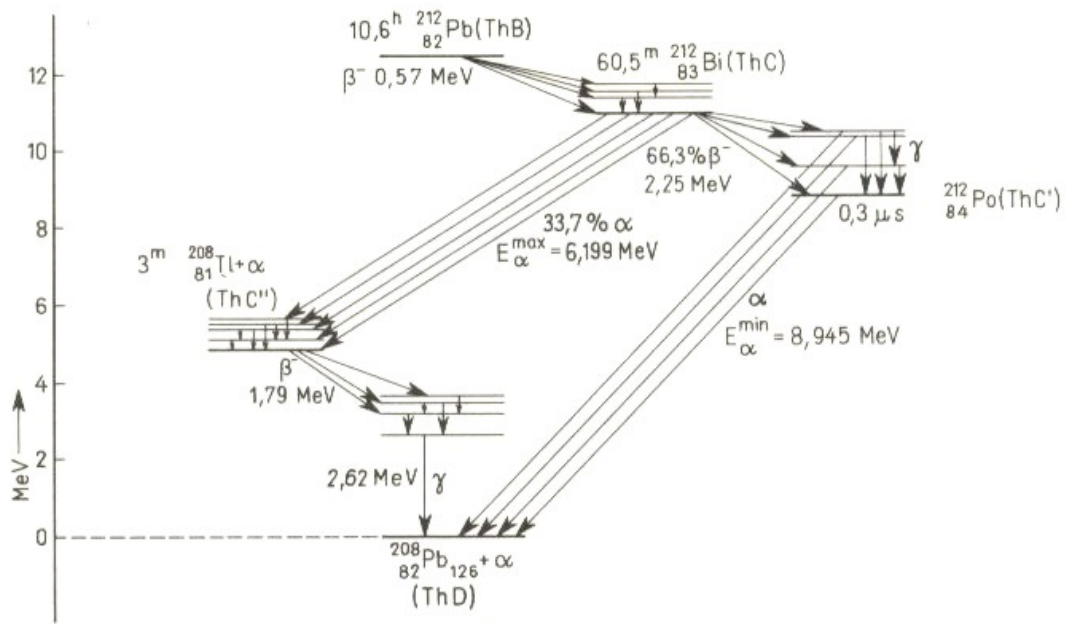
$$A := -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N \Rightarrow \boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}} \quad (3.2)$$

wobei λ als *Zerfallskonstante* bezeichnet wird. Der zeitliche Verlauf der Aktivität ist folglich gegeben durch

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (3.3)$$

mit der Aktivität zu Zeitpunkt $t = 0$ als $A_0 = \lambda N_0$, d.h. die Aktivität fällt exponentiell ab.

3. Zerfälle instabiler Kerne



Zerfallsschema für ThB(^{212}Pb) mit Folgeprodukten, stark vereinfacht

Abbildung 3.1: Beispiel für ein Termschema (aus Ref. [1])

Als Halbwertszeit $t_{1/2}$ bezeichnet man die Zeit, nach der die Hälfte der anfangs vorhandenen Kerne zerfallen ist:

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N \cdot e^{-\lambda t_{1/2}} \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

und als (mittlere) Lebensdauer τ bezeichnet man

$$\tau := \frac{1}{\lambda} \approx 1.443 t_{1/2} \quad (3.5)$$

τ bezeichnet die Zeit, nach der die Anzahl der instabilen Kerne einer Probe auf $1/e$ ihres Anfangswerts abgefallen ist. Als Zerfallsbreite bezeichnet man auf Grund der Unschärferelation:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar\lambda \quad (3.6)$$

3. Zerfälle instabiler Kerne

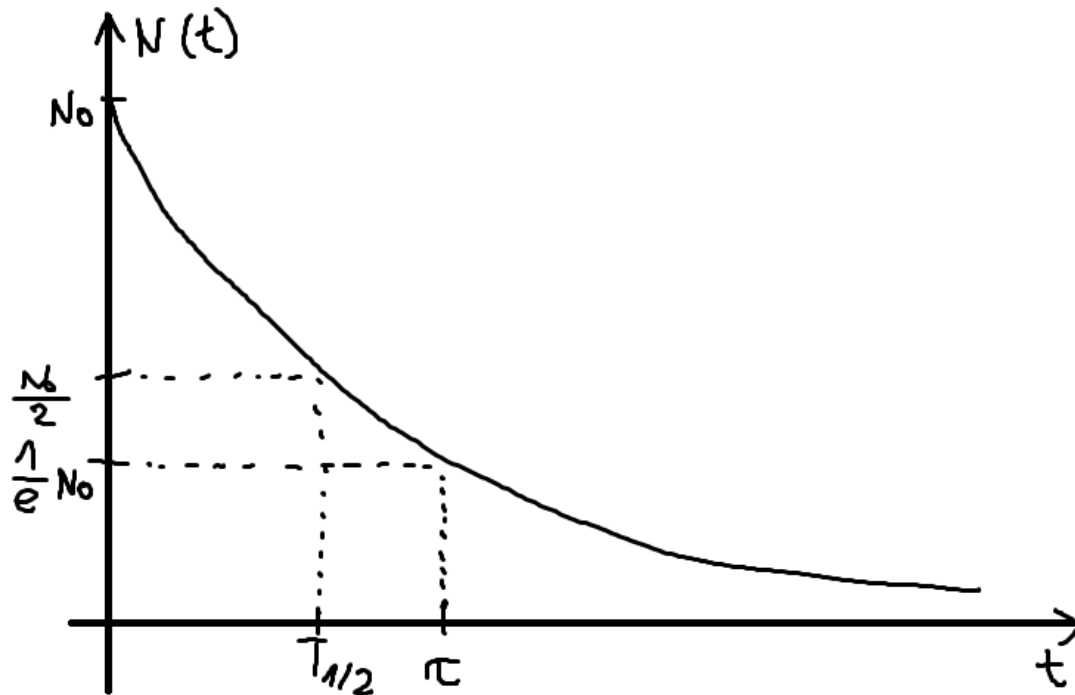
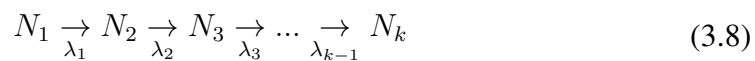


Abbildung 3.2: Anzahl der instabilen Kerne als Funktion der Zeit

Falls mehrere Zerfälle mit verschiedenen Zerfallskonstanten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ möglich sind, so ist

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \dots\end{aligned}\quad (3.7)$$

Ein instabiler Kern muss nicht zwangsläufig zu einem stabilen Kern zerfallen, sondern auch das Zerfallsprodukt kann instabil sein. Es kommt somit zu *Zerfallsketten*



beispielsweise die Uran- und Thoriumzerfallsreihen. Dieser Prozess lässt sich durch ein System aus Differentialgleichungen beschreiben:

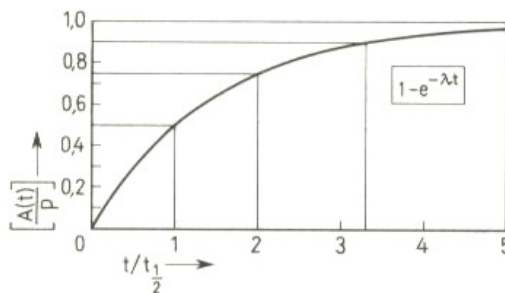
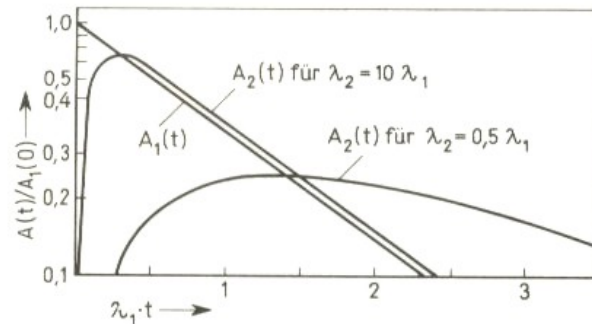
$$\dot{N}_i = \lambda_{i-1} N_{i-1} - \lambda_i N_i \quad (3.9)$$

Für eine Kette mit zwei instabilen Isotopen ist

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \quad (3.10)$$

falls zu Beginn $N_0 = N_1(0)$ Mutterkerne vorhanden sind und keine Tochterkerne ($N_2(0) = 0$).

3. Zerfälle instabiler Kerne



Zeitliche Änderung von Aktivitäten
a) Verhältnis von Mutter zu Tochter-Aktivität für $\lambda_2 = 10 \lambda_1$ und für $\lambda_2 = 0,5 \lambda_1$, nach [Fer 50]
b) Anstieg der Aktivität einer Substanz, die mit gleichmäßiger Rate produziert wird

Abbildung 3.3: Verlauf der Aktivitäten in einer Zerfallskette mit zwei instabilen Gliedern, wobei der Tochterkern eine wesentlich Halbwertszeit aufweist als der Mutterkern bzw. eine deutlich kürzere Lebensdauer (aus Ref. [1])

- Das Maximum der Aktivität der zweiten Substanz tritt auf beim Schnittpunkt der Kurven $A_1(t)$ und $A_2(t)$.
- Für große Zeiten ist der Abfall der Aktivität bestimmt durch die größere Lebensdauer
- Falls in einer Kette eine langlebige Substanz vorkommt und alle anderen kurzlebig sind, so bestimmt alleine die langlebige die Aktivität aller nachfolgenden Zerfälle (Radioaktives Gleichgewicht)

Die Produktion von radioaktiven Substanzen (z.B. für medizinische Anwendungen) erfolgt unter anderem mit Beschleunigern. Dabei werden pro Zeiteinheit p Kerne erzeugt, die jedoch wieder zerfallen:

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = -\lambda N + p \Rightarrow A(t) = p \cdot (1 - e^{-\lambda t}) \quad (3.11)$$

Einheiten:

Zerfälle werden in Becquerell gemessen:

$$1\text{Bq} = 1\text{Zerfall/s.} \quad (3.12)$$

3. Zerfälle instabiler Kerne

Historisch wurde Curie als Einheit verwendet:

$$1\text{Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{Zerfälle/s.} \quad (3.13)$$

Messung der Wirkung radioaktiver Strahlung: Radioaktive Strahlung führt zur Ionisation und Energiedeposition. Für die Ionisation wird die Einheit Röntgen verwendet

$$1\text{R} = 2.58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{kg}} (\text{Luft}) \quad (3.14)$$

wobei Luft zur Referenz gewählt wurde, d.h. 1R bezeichnet die Strahlungsenergie, welche in 1kg Luft durch Ionisation die Ladung $2.58 \cdot 10^{-4}\text{C}$. Für andere Stoffe unterscheidet sich dieser Wert!

Die Energiedeposition wird durch die Energiedosis (d.h. die durch Strahlung an eine Substanz abgegebene Energie) gemessen:

$$1\text{rad} = 10^{-2} \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (3.15)$$

wurde historisch verwendet, heute geht man über zur Einheit Gray

$$1\text{Gy} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (3.16)$$

Die Äquivalentdosis berücksichtigt die je nach Strahlungsart unterschiedliche biologische Wirksamkeit:

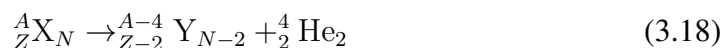
$$\begin{aligned} \text{Äquivalentdosis} &= (\text{Energiedosis}) * (\text{biol. Bewertungsfaktor}) \\ 1 \frac{\text{Sv}}{(\text{Sievert})} &= q \cdot 1\text{Gy} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Zur Definition des Bewertungsfaktors wird 200keV Röntgenstrahlung verwendet, für die $q := 1$ ist. Für β -Strahlung ist $q = 1.5$, für α -Strahlung $q = 20$. Die natürliche Strahlenbelastung liegt zwischen 1 – 5mSv/Jahr, hinzu kommt noch eine zivilisatorische Belastung. Auf einem Transatlantikflug erhält man beispielsweise eine Dosis vom 0.3mSv, bei einer Röntgenaufnahme sogar rund 4mSv.

3.2 Der α -Zerfall

Der α -Zerfall sowie weitere Arten von Strahlung wurden zuerst von Becquerel et al. 1896 in Paris entdeckt. Rutherford fand 1908 aus der Ablenkung im Magnetfeld, dass für α -Teilchen $Z = 2$ und $A = 4$ (vierfache Masse von Wasserstoff). Aus der festen Reichweite konnte geschlossen werden, dass es sich um monoenergetische Strahlung handelt.

Der α -Prozess wird beschrieben durch



3. Zerfälle instabiler Kerne

wobei ${}^4_2\text{He}_2$ das α -Teilchen ist.

Die Zerfallsenergie ist

$$Q := (m_X - m_Y - m_\alpha) \cdot c^2 = E_{\text{kin}}(\alpha) + E_{\text{kin}}(Y) \quad (3.19)$$

Mittels Energie- und Impulssatz folgt dann

$$E_{\text{kin}}(\alpha) = \frac{Q}{\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}\right)} \quad (3.20)$$

Für schwere Kerne erhält als das α -Teilchen also den größten Anteil der zur Verfügung stehenden Energie. Die restliche Energie geht in den Rückstoß des Tochterkerns.

α -Zerfall durch quantenmechanischen Tunneffekt

Wie ist nun die Zerfallswahrscheinlichkeit für den α -Zerfall gegeben?

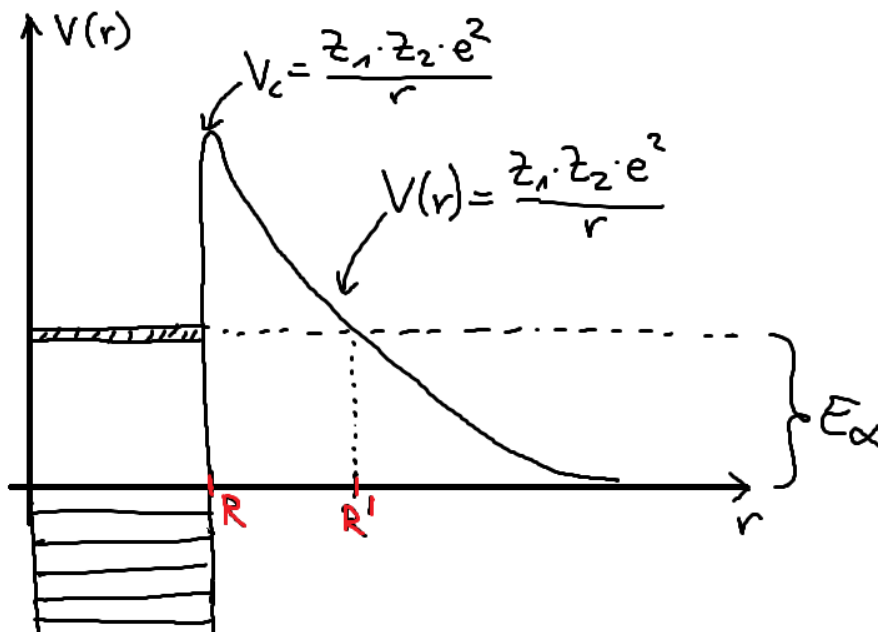


Abbildung 3.4: Zum α -Zerfall durch quantenmechanischen Tunneffekt: Vor dem Zerfall muss sich da α -Teilchen in einem metastabilen Zustand befinden, so dass es nach dem Tunneln die Energie E_α besitzt.

Die Zerfallsenergie tritt als kinetische Energie des α -Teilchens auf, die Wahrscheinlichkeit λ setzt sich zusammen aus

$$\lambda = \lambda_0 \cdot T_\alpha \quad (3.21)$$

Hierbei sind

λ_0 Wahrscheinlichkeit für Bildung der α -Konfiguration und Auftreffen auf den Potentialwall

3. Zerfälle instabiler Kerne

Tabelle 3.1: Einige Werte für α -Zerfälle

Element	T_α	E_α	$t_{1/2}$
$^{212}_{84}\text{Po}$	$1.32 \cdot 10^{-13}$	8.78MeV	0.3 μ s
$^{224}_{88}\text{Ra}$	$5.9 \cdot 10^{-26}$	5.70MeV	3.6d
$^{144}_{66}\text{Nd}$	$2.18 \cdot 10^{-41}$	1.84MeV	$2 \cdot 10^{15}$ a

T_α Wahrscheinlichkeit für Durchdringen der Potentialwalls, *Transmissionskoeffizient*

Die quantenmechanik liefert für den Transmissionskoeffizienten (Tunneleffekt):

$$T \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^D \sqrt{2 \cdot m (V(r) - E)} dr \right] \quad (3.22)$$

Angewandt auf das Coulomb-Potential ergibt sich mit der abkürzenden Schreibweise $T \approx e^{-G}$:

$$G = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{r} - E} dr \quad (3.23)$$

G wird auch als *Gamov Faktor* bezeichnet. Die Lösung hierzu lautet

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \cdot Z_1 Z_2 \cdot e^2 \gamma(x) \quad \text{mit} \quad (3.24)$$

$$\gamma(x) = \arccos(\sqrt{x}) - \sqrt{x - (1-x)}$$

$$x = \frac{R}{R'}$$

Einige Werte für α -Zerfälle sind in Tabelle 3.1 dargestellt \rightarrow Es gibt eine eindeutige Korrelation zwischen T_α , E_α und $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} \sim \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{T_\alpha} \sim e^G \quad (3.25)$$

$$\Rightarrow \ln t_{1/2} \sim G \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$$

Diesen Zusammenhang bezeichnet man als *Geiger-Nuttalsche Regel*.

Da es sich beim α -Zerfall um einen zwei-Körper-Zerfall handelt, ist das α -Spektrum diskret. Es sind jedoch mehrere Linien möglich, die durch Übergänge in verschiedene angeregte Zustände des Tochterkerns hervorgerufen werden.

Natürliche Radioaktivität

Bei der Synthese von Elementen (in Sternen und Supernovae) ist eine große Anzahl radioaktiver Kerne entstanden \rightarrow Nur wenige Isotope mit langen Halbwertszeiten haben überlebt. Beispiele für solche Isotope sind

3. Zerfälle instabiler Kerne

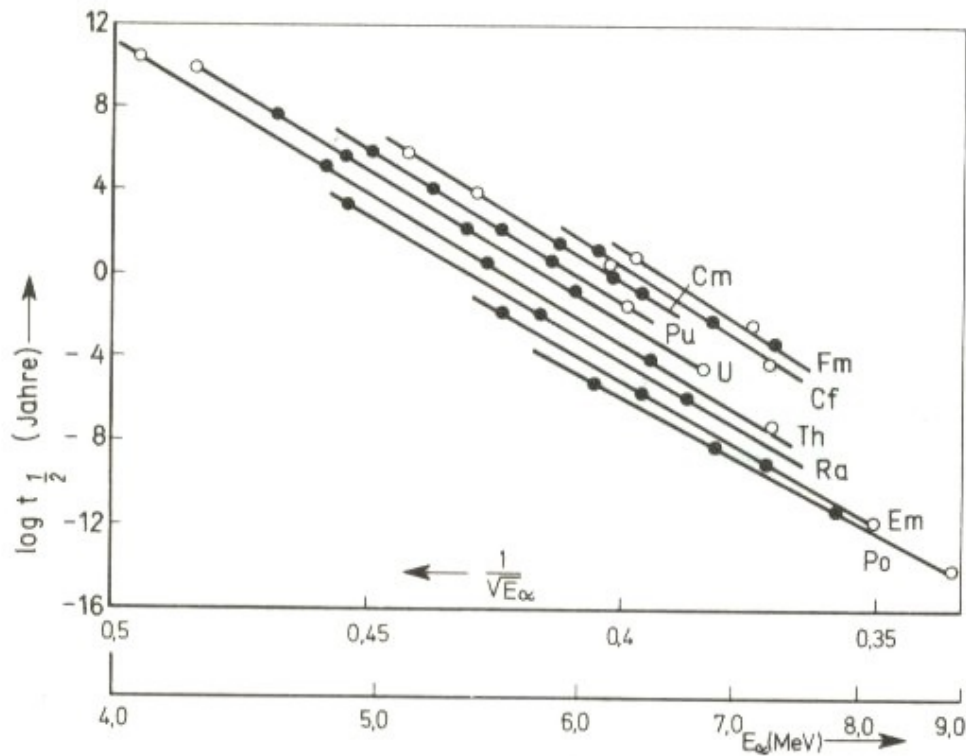


Abbildung 3.5: Die Geiger-Nuttalsche Regel ist zumindest innerhalb einer Zerfallsreihe gut erfüllt (aus Ref. [1])

Kalium-40 ^{40}K (β -Strahler) mit einer Halbwertszeit von $t_{1/2} = 1.25 \cdot 10^9 \text{a}$

Rubidium-87 ^{87}Rb (β -Strahler) mit einer Halbwertszeit $t_{1/2} = 4.9 \cdot 10^{10} \text{a}$

Samarium-147 ^{147}Sm (α -Strahler) mit einer Halbwertszeit $t_{1/2} = 1.1 \cdot 10^{11} \text{a}$

Rhenium-187 ^{187}Re (β -Strahler) mit einer Halbwertszeit $t_{1/2} = 5 \cdot 10^{10} \text{a}$

Die schwersten langlebigen Kerne sind

^{232}Th Thorium

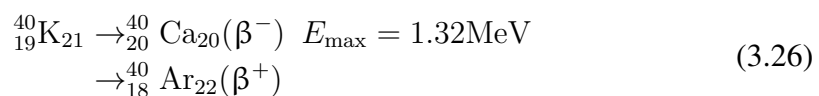
^{235}U Uran

^{238}U Uran

^{237}Np Neptunium (kommt in der Natur nicht mehr vor, $t_{1/2} \approx 10^6 \text{a}$!)

Diese vier Kerne stellen die Ausgangspunkte langer Zerfallsketten dar.

Einige bekannte Zerfälle sind



3. Zerfälle instabiler Kerne

ebenso wie der Zerfall von ^{14}C , welches zur Datierung archäologischer Objekte verwendet wird. Es entsteht unter dem Einfluss kosmischer Strahlung durch



^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von $t_{1/2} = 5730\text{a}$ durch β^- -Zerfall zu ^{14}N . In der Atmosphäre ist der Anteil an ^{14}C

$$\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} \approx 1.5 \cdot 10^{-12} \quad (3.28)$$

Ein lebender Organismus nimmt diese Mischung durch seinen Stoffwechsel auf. Nach dem Absterben wird kein ^{14}C mehr zugeführt, so dass die ^{14}C -Menge durch Zerfälle abnimmt. Aus der Aktivität lässt sich bestimmen, welche Zeit seit dem Absterben des Organismus vergangen ist.

3. Zerfälle instabiler Kerne

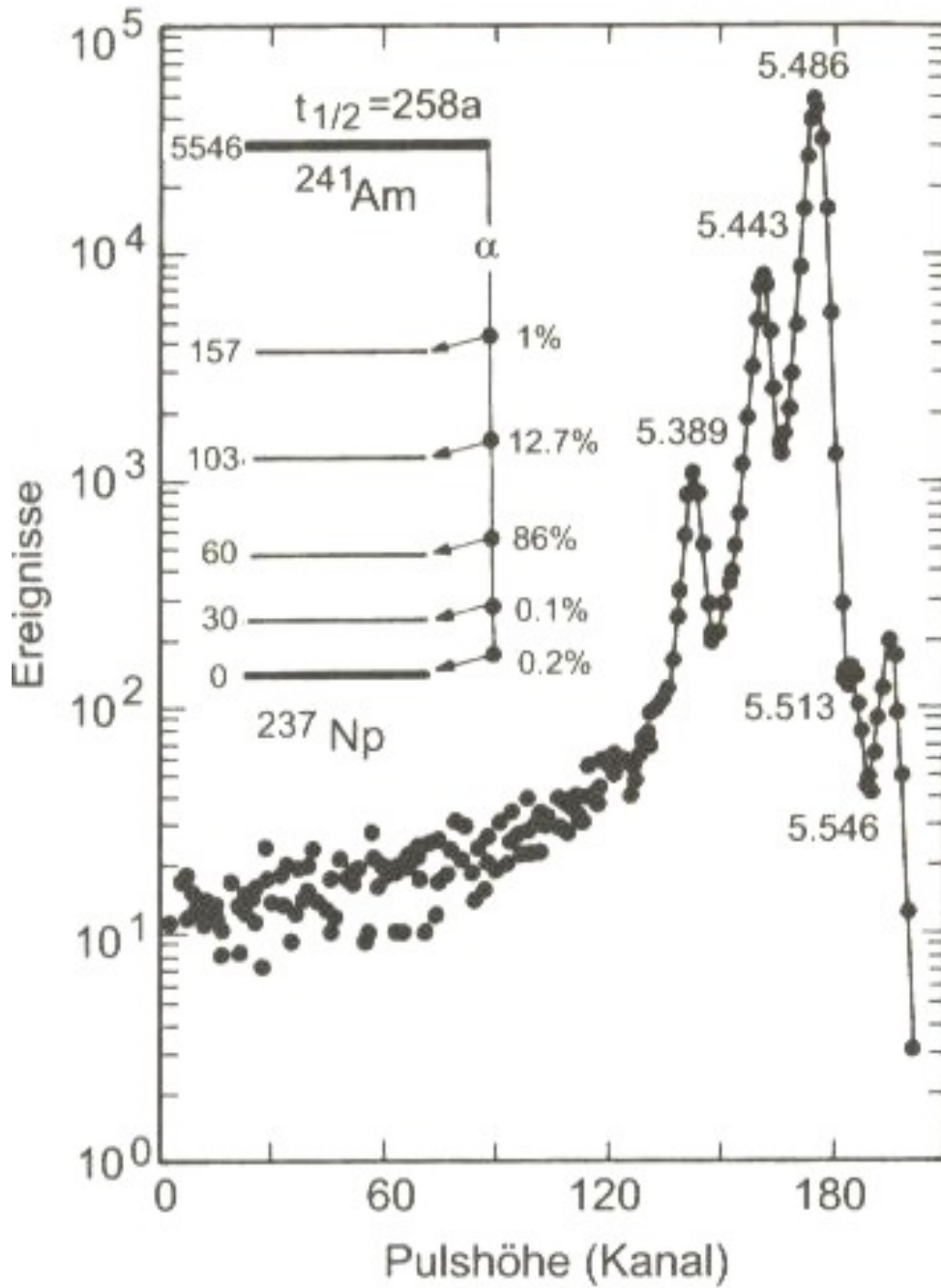


Abbildung 3.6: α -Zerfallsspektrum von Americium ^{241}Am (aus Ref. [4])

3. Zerfälle instabiler Kerne

Natürliche Zerfallsreihen. Die Zerfallsreihe, die beim Neptunium beginnt, kommt in der Natur wegen der vergleichsweise kurzen Halbwertszeit nicht mehr vor. Diese Elemente sind jedoch zur Zeit der Entstehung der Erde ebenfalls vorhanden gewesen

Nomenklatur	Mutternuklid	Halbwertszeit	Endprodukt	Zerfälle
4n	^{232}Th	$1.405 \cdot 10^{10}$ a	^{208}Pb	$6\alpha, 4\beta^-$
4n+1	^{237}Np	$2.14 \cdot 10^6$ a	^{209}Bi	$7\alpha, 4\beta^-$
4n+2	^{238}U	$4.468 \cdot 10^9$ a	^{206}Pb	$\begin{cases} 8\alpha, 6\beta^- \\ 10\alpha, 8\beta^- \end{cases}$
4n+3	^{235}U	$7.038 \cdot 10^8$ a	^{207}Pb	$7\alpha, 4\beta^-$

Abbildung 3.7: Die Isotope ^{232}Th , ^{237}Np , ^{238}U sowie ^{235}U stellen die Ausgangspunkte langer Zerfallsketten dar. Auf Grund seiner vergleichsweise geringen Lebensdauer ist die ^{237}Np -Kette nicht mehr natürlich anzutreffen, bei der Entstehung der Erde war ^{237}Np jedoch vorhanden. (aus Ref. [10])

3.3 Der β -Zerfall

3.3.1 Zerfallsarten

Rutherford fand, dass β -Teilchen

- elektrisch geladen sind,
- ihre Masse der Elektronenmasse entspricht,
- vom Kern emittiert werden und ein *kontinuierliches* Energiespektrum besitzen!

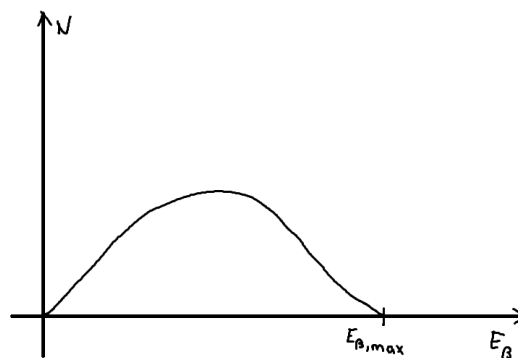


Abbildung 3.8: Form des β -Spektrums

Es kann sich beim β -Zerfall also nicht um einen Zweikörperzerfall handeln!¹

Pauli postulierte daher 1930 ein elektrisch neutrales Teilchen (damals als Neutron bezeichnet), das beim β -Zerfall zusammen mit dem β -Teilchen emittiert wird.

Beim β -Zerfall wandelt sich ein Kern wie folgt um



Aus der Drehimpulserhaltung folgt, dass auch das heute als (Elektron-)Neutrino bezeichnete Teilchen ν_e den Spin $\frac{1}{2}\hbar$ besitzt, es handelt sich also um ein Fermion. Man unterscheidet drei Arten von β -Zerfällen:

(i) β^- -Zerfall:



Es wird ein Elektron zusammen mit einem Anti-Elektron-Neutrino emittiert. Ein berühmtes Beispiel ist der Zerfall eines freien Neutrons:



¹Zur Erinnerung: Beim α -Zerfall ist die kinetische Energie des α -Teilchens durch die Zerfallsenergie Q und die Masse des Tochterkerns m_Y bestimmt: $E_{\text{kin}}(\alpha) = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}}$

3. Zerfälle instabiler Kerne

Die mittlere Lebensdauer eines freien Neutrons beträgt $\tau \approx 887.4\text{s} \sim 15\text{min}$.

Die Zerfallsenergie beim β^- -Zerfall ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 Q = \Delta E &= \{m_k(Z, A) - m_k(Z + 1, A) - m_e - m_\nu\} c^2 \\
 &= \{m_k(Z, A) + Z \cdot m_e - m_k(Z + 1, A) - Z \cdot m_e - m_e\} c^2 \\
 \boxed{Q} &= \boxed{\{m(Z, A) - m(Z + 1, A)\} c^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

Hierbei bezeichnet m_k die Kernmasse, m die Masse des gesamten Atoms (d.h. inklusive Elektornenhülle). Die Masse des Neutrinos ist dabei vernachlässigbar klein, bisherige Experimente zur Massenbestimmung des Neutrinos über β^- -Zerfall konnten nur obere Grenzen für die Masse des Neutrinos liefern.

(ii) β^+ -Zerfall:



→ Der β^+ -Zerfall tritt beim Proton *nicht* auf: Experimente, die nach einem möglichen Protonenzerfall suchen liefern eine untere Grenze der Lebensdauer: $\tau(p) > 10^{32}\text{a}$. Die Zerfallsenergie eines β^+ -Zerfalls ist

$$Q = \{m(Z, A) - m(Z - 1, A) - 2 \cdot m_e\} c^2
 \tag{3.34}$$

⇒ Es steht nicht die gesamte Massendifferenz zur Verfügung, sie ist um zwei Elektronenmassen reduziert.

(iii) Elektroneneinfang (EC: electron capture)



Es handelt sich also um einen Zweikörperzerfall, so dass das ν_e eine feste Energie besitzt. Da meist ein Elektron aus der k -Schale eingefangen wird, bleibt eine angeregte Elektornenhülle zurück mit einem Loch in der k -Schale. Nimmt nun ein äußeres Elektron diesen Platz ein, so kommt es zur Emission von Röntgenstrahlung. Alternativ kann die Energie auch auf ein weiteres (äußeres) Elektron übertragen werden, welches dann emittiert und als *Auger-Elektron* bezeichnet wird.

Der Elektroneneinfang tritt insbesondere dann auf, wenn $Q = \Delta E$ kleiner als die Energie $2m_e c^2 = 1.022\text{MeV}$ ist.

3. Zerfälle instabiler Kerne

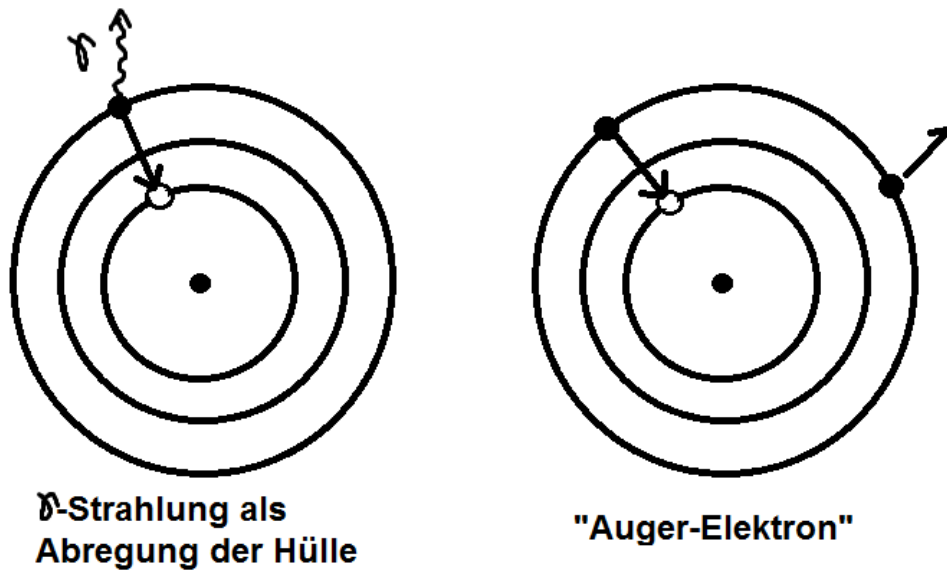


Abbildung 3.9: Folgerscheinungen durch Abregung der Hülle nach Elektroneneinfang

3.3.2 Die Form des β -Spektrums

Beim β -Zerfall kommt es wie bereits dargestellt zu einem kontinuierlichen Energiespektrum. Die Form dieses Spektrums kann mit Hilfe der Quantenmechanik berechnet werden. Hierzu wird die Übergangswahrscheinlichkeit verwendet, welche sich aus der zeitabhängigen Störungsrechnung erster Ordnung ergibt.

Fermi's Goldene Regel lautet:

$$N(p)dp = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|H|i\rangle|^2 \cdot \frac{dn}{dE} \quad (3.36)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, das Elektron im Impulsintervall $[p, p + dp]$ zu finden. Das Matrixelement ist

$$\langle f|H|i\rangle = \int \psi_f^* H \psi_i dr =: H_{fi}. \quad (3.37)$$

H ist hier der Hamilton-Operator der schwachen Wechselwirkung, $\frac{dn}{dE}$ bezeichnet die Dichte der möglichen Endzustände im Energieintervall dE und stellt den bestimmten Faktor dar. Dies ist der Fall, wenn das Matrixelement H_{fi} kaum Energieabhängig ist, was in den meisten Fällen erfüllt ist. Wie den Übungen (oder auch Mayer-Kuckuck, Kap. 8.3) zu entnehmen ist, erhält man schließlich als Besetzungsdichte im Impulsraum

$$N(p) dp = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} |H_{fi}|^2 \cdot P_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp \quad (3.38)$$

Dabei ist E_0 die maximale Energie, d.h. der Q -Wert der Reaktion. P_e und E_e bezeichnen den Impuls und die Energie des e^- . Das Matrixelement H_{fi} lässt sich unter Annah-

3. Zerfälle instabiler Kerne

me einer Leptonenwellenfunktion $\psi(r)$ auch mit der Kopplungskonstante g schreiben:

$$|H_{fi}|^2 = g^2 M^2 \quad (3.39)$$

Dies enthält zwei Anteile:

$$|H_{fi}|^2 = f_F^2 |M_F|^2 + g_{GT} |M_{GT}|^2 \quad (3.40)$$

wobei der Index F für Fermi steht, der Index GT für Gamow-Teller. Für Fermiübergänge ist

$$M_F = \int \psi_f^* \cdot \text{id} \cdot \psi_i d^3\vec{r} \quad (3.41)$$

und wird als *Fermi-Matrix-Element* bezeichnet.

→ Kein Umklappen des Kernspins

→ Elektron und Neutrino befinden sich im Singulett-Zustand (anti-parallel, $\uparrow\downarrow$)

Für Gamow-Teller Übergänge ist

$$M_{GT} = \int \psi_f^* \cdot \sigma \psi_i d^3\vec{r}, \quad (3.42)$$

σ ist hierbei der Spin-Operator. Die Leptonen (e^- , $\bar{\nu}_e$) bilden einen Triplet-Zustand ($\uparrow\uparrow$).

Beispiele:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.43)$$

Die Projektion auf die z -Achse des Neutronenspins sei $+\frac{1}{2}$. Beim Fermi-Übergang ist der Spin unverändert, d.h. auch das Proton besitzt einen Spin mit z -Projektion $+\frac{1}{2}$. Es muss somit

$$s_e + s_\nu + (\ell_e + \ell_\nu) = 0 \quad (3.44)$$

sein um die Drehimpulserhaltung zu erfüllen. Es ist dann also $\Delta I = 0$ und auch die Parität ist unverändert: $\Delta\pi = 0$.

Für einen Gamow-Teller-Übergang kann der Spin wechseln, d.h. das Proton kann Spin $-\frac{1}{2}$ oder $+\frac{1}{2}$ besitzen. Elektron und Neutrino besitzen zusammen Spin $+1$ (Triplet-Zustand). Es sind somit Übergänge mit $\Delta I = 1$ und $\Delta I = 0$ möglich (jedoch nicht $0 \rightarrow 0$).

Form des β -Spektrums

Auf Grund der endlichen Neutrinomasse muss ein (kompliziert zu berechnender) Korrekturfaktor angebracht werden:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu}{E_0 - E}\right)^2} \quad (3.45)$$

3. Zerfälle instabiler Kerne

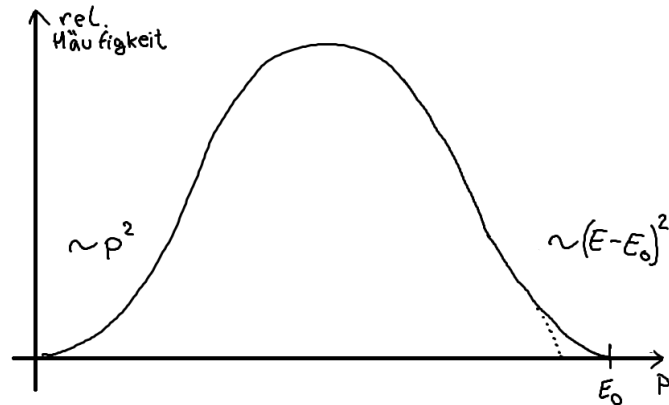


Abbildung 3.10: Form des β -Spektrums. Der gepunktete Teil deutet die Abweichung an, die auf Grund der endlichen Neutrinomasse entsteht.

Die Form des Spektrums im Endpunkt liefert Aufschlüsse über die Masse der Neutrinos! Experimentell wird meist Tritium verwendet, mit $E_0 = 18.6\text{keV}$. Das Experiment *Katrin* in Karlsruhe erreichte bei der Vermessung der Neutrinomasse eine Genauigkeit von $\sim 0.2\text{eV}$.

Zusätzlich sind weitere Korrekturen nötig:

- (i) Coulomb-Wechselwirkung auf Grund der Anziehung/Abstoßung von e^-/e^+ durch den Kern \rightarrow Faktor:

$$F(Z, p) \approx \frac{|\psi_e(0)_{\text{Coul}}|^2}{|\psi_e(0)_{\text{frei}}|^2} \quad (3.46)$$

Diese Werte sind (durch Näherungsmethoden berechnet) tabelliert zu finden.

- (ii) Abschirmung des Kern-Coulomb-Feldes durch Hüllenelektronen (relevant für kleine β -Energien, $\lesssim 100\text{keV}$). $\rightarrow F(Z, p) = \text{Fermifunktion}$.

Schlussendlich erhält man mit diesen Korrekturen

$$N(p) dp = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \cdot |H_{fi}|^2 \cdot F(Z, p) \cdot p^2 \cdot (E_0 - E)^2 dp. \quad (3.47)$$

Mit den Definitionen

$$\epsilon := \frac{E}{m_e c^2}, \quad \epsilon_0 := \frac{E_0}{m_e c^2}, \quad p = \sqrt{E^2 - m_e^2} = \dots = m_e \sqrt{\epsilon^2 - 1} \quad (3.48)$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dE} = \dots &\Rightarrow dp = m_e \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} dE \\ p^2 dp &= m_e^3 \cdot \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} d\epsilon \end{aligned} \quad (3.49)$$

3. Zerfälle instabiler Kerne

lässt sich dies schreiben als

$$N(\epsilon)d\epsilon = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |H_{fi}|^2 \cdot F(Z, \epsilon) \cdot \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} \cdot (\epsilon_0 - \epsilon)^2 d\epsilon \quad (3.50)$$

Die Gesamtzerfallswahrscheinlichkeit ergibt sich nun durch Integration über das gesamte Spektrum:

$$\lambda := \int_1^{\epsilon_0} N(\epsilon) d\epsilon = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \cdot |H_{fi}|^2 \cdot f(Z, \epsilon_0) \quad (3.51)$$

mit

$$f(Z, \epsilon_0) = \int_1^{\epsilon_0} F(Z, \epsilon) \cdot \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} (\epsilon_0 - \epsilon)^2 d\epsilon \quad (3.52)$$

Auch für dieses Integral sind Werte tabelliert zu finden. Historisch wurden ft -Werte eingeführt, die ein Maß für die Kernmatrixelemente / Kopplungskonstanten liefern:

$$ft := f(z, \epsilon_0) \cdot t_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m^5 c^4 \cdot |H_{fi}|^2} \quad (3.53)$$

Die Kernladungszahl des Tochterkerns ist in der Regel bekannt, die maximale Zerfallsenergie ϵ_0 sowie die Halbwertszeit $t_{1/2}$ lassen sich messen, so dass auf Grund

$$ft \sim \frac{1}{|H_{fi}|^2} \quad (3.54)$$

die Stärke des Übergangs-Matrix-Elements (der Kopplungskonstante) bestimmt werden kann. Üblicher weise betrachtet man $\ln ft$ und unterteilt Zerfälle entsprechend in

1. Gruppe: $\ln ft \lesssim 4$: über-erlaubte Zerfälle
2. Gruppe: $\ln ft \lesssim 5$: erlaubte Zerfälle
3. Gruppe: $\ln ft \sim 8$: einfach verbotene Zerfälle
4. Gruppe: $\ln ft \sim 12$: zweifach verbotene Zerfälle
5. Gruppe: $\ln ft \sim 18$: dreifach verbotene Zerfälle

Bei erlaubten Zerfällen muss mindestens eines der Kernmatrixelemente nicht verschwindend sein (Fermi-Übergänge, Gamov-Teller-Übergänge oder gemischte Übergänge). Für ein- oder mehrfach verbotene Übergänge müssen Elektron und Neutrino einen zusätzlichen Bahndrehimpuls aufnehmen was zu einer Unterdrückung der entsprechenden Zerfälle führt.

3. Zerfälle instabiler Kerne

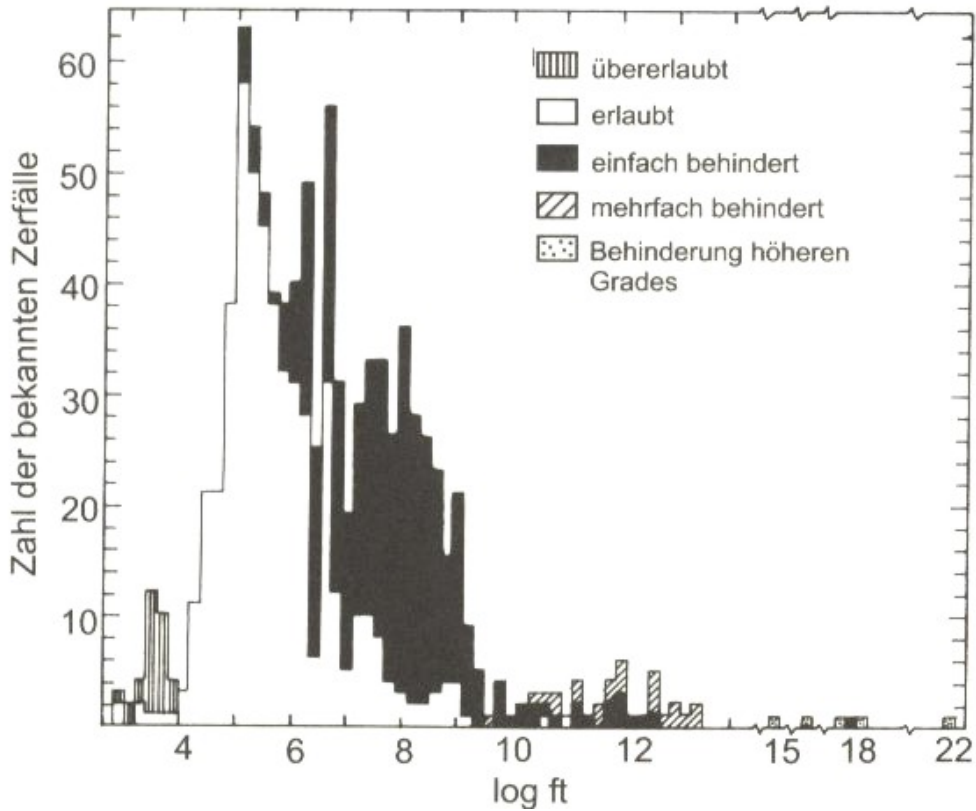


Abbildung 3.11: Anzahl der bekannten Übergänge für verschiedene $\ln ft$ -Werte. (aus Ref. [1])

Bei Fermi-Übergängen ändert der Einheitsoperator weder Spin noch Parität der Wellenfunktion, d.h. die Auswahlregeln für Fermi-Übergänge sind

$$\Delta I = 0, \quad \Delta \pi = 0 \quad (\text{keine Paritätsänderung}) \quad (3.55)$$

Bei Gamov-Teller-Übergängen hingegen ändert sich die z -Komponente des Spins, so dass der Drehimpuls nur erhalten bleibt, wenn die beiden Leptonen den Spin 1 forttragen \Rightarrow Triplettzustand.

$$\Delta I = 0, \pm 1, \quad \Delta \pi = 0 \quad (\text{keine Paritätsänderung}) \quad (3.56)$$

Für den Zerfalls des freien Neutrons ist das Verhältnis zwischen Fermi und Gamow-Teller Zerfällen

$$\left| \frac{g_{GT}}{g_F} \right| = 1.261 \pm 0.004 \quad (3.57)$$

Verbotene Übergänge:

Falls $\Delta I > 1$ ist, so verschwinden sowohl M_F als auch M_{GT} . Die Leptonen müssen dann mit einem Bahndrehimpuls $\ell > 0$ emittiert werden. Dies entspricht anschaulich dem Bild, dass das Elektron mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nicht vom Zentrum des Kerns emittiert wird.

3. Zerfälle instabiler Kerne

Art des Übergangs	Auswahlregeln		log ft	Beispiel	
	Spin	Parität ¹⁾		Isotop	Halbwertszeit
Übererlaubt	$\Delta I = 0, \pm 1$ (+)		$3,5 \pm 0,2$	^1_0n	11,7 m
Erlaubt	$0, \pm 1$ (+)		$5,7 \pm 1,1$	$^{35}_{16}\text{S}$	87 d
Einfach verboten	$0, \pm 1$ (-)		$7,5 \pm 1,5$	$^{198}_{79}\text{Au}$	2,7 d
„Unique“ einfach verboten	± 2 (-)		$8,5 \pm 0,7$	$^{91}_{40}\text{Y}$	61 d
Zweifach verboten	± 2 (+)		$12,1 \pm 1,0$	$^{137}_{55}\text{Cs}$	30 a
Dreifach verboten	± 3 (-)		$18,2 \pm 0,6$	$^{87}_{37}\text{Rb}$	6×10^{10} a
Vierfach verboten	± 4 (+)		22,7	$^{115}_{51}\text{In}$	6×10^{14} a

¹⁾ (+) bedeutet „keine Paritätsänderung“, (-) bedeutet „Paritätsänderung“

Abbildung 3.12: (aus Ref. [1])

3.3.3 Paritätsverletzung im β -Zerfall

Eine grundlegende Frage lautet: Ist ein System spiegelinvariant?

$$\text{System } K \xrightarrow{\text{Spiegelung}} \text{System } K' \quad (3.58)$$

Die beobachteten physikalischen Größen sollten in K und K' gleich sein.

Der Paritätsoperator P ändert das Vorzeichen polarer Vektoren, axiale Vektoren bleiben unverändert:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\xrightarrow{P} -\vec{r} \quad (\text{Ortsvektor, polar}) \\ \vec{p} &\xrightarrow{P} -\vec{p} \quad (\text{Impuls, polar}) \\ \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} &\xrightarrow{P} \vec{L} \quad (\text{Drehimpuls, axial}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Allgemein gilt für einen Drehimpulsvektor \vec{J}

$$\vec{J} \xrightarrow{P} \vec{J} \quad (3.60)$$

Der Paritätsoperator P kann auf eine Wellenfunktion ψ angewandt werden:

$$\begin{aligned} P|\psi(\vec{r})\rangle &= |\psi(-\vec{r})\rangle \\ P^2|\psi(\vec{r})\rangle &= |\psi(\vec{r})\rangle \Rightarrow P^2 = \text{id} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Im Allgemeinen können $\psi(\vec{r})$ und $\psi(-\vec{r})$ völlig verschieden sein, wenn P jedoch mit H kommutiert, d.h. wenn

$$[H, P] = 0 \quad (3.62)$$

3. Zerfälle instabiler Kerne

so ist die Parität eine Erhaltungsgröße und die Wellenfunktion kann gleichzeitig als Eigenfunktion von P und H gewählt werden:

$$\begin{aligned} H|\psi(\vec{r})\rangle &= E|\psi(\vec{r})\rangle & H P|\psi(\vec{r})\rangle &= P H|\psi(\vec{r})\rangle = P \cdot E|\psi(\vec{r})\rangle \\ H|\psi'(\vec{r})\rangle &= & & E|\psi'(\vec{r})\rangle \end{aligned} \quad (3.63)$$

d.h. $|\psi(\vec{r})\rangle$ und $P|\psi(\vec{r})\rangle$ erfüllen die selbe Schrödingergleichung mit denselben Eigenwerten E .

Wenn keine Entartung vorliegt, müssen $|\psi(\vec{r})\rangle$ und $|\psi'(\vec{r})\rangle$ die selbe physikalische Situation beschreiben.

$$\Rightarrow |\psi'(\vec{r})\rangle = P|\psi(\vec{r})\rangle = \pi|\psi(\vec{r})\rangle \quad (3.64)$$

Aus dieser Eigenwertgleichung folgt, dass

$$\boxed{\pi = \pm 1} \quad (3.65)$$

Man sagt, die entsprechende Wellenfunktion habe *gerade* (+) oder *ungerade* (−) Parität.

Beispiele:

- (i) Ein wichtiges Beispiel einer Eigenfunktion der Parität sind $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$, die Eigenfunktionen des Bahndrehimpulsoperators. Die Spiegelung $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ überführt die sphärischen Koordinaten wie folgt:

$$\begin{aligned} r &\rightarrow r \\ \theta &\rightarrow \pi - \theta \\ \varphi &\rightarrow \pi + \varphi \end{aligned} \quad (3.66)$$

Somit ist

$$\boxed{PY_\ell^m = (-1)^\ell \cdot Y_\ell^m} \quad (3.67)$$

- (ii) Teilchenreaktionen: Für eine Reaktion

$$a + b \rightarrow c + d \quad (3.68)$$

ist die Wellenfunktion des Anfangszustands

$$|\text{Anfang}\rangle = |a\rangle \cdot |b\rangle \cdot |\text{rel. Bewegung}\rangle \quad (3.69)$$

wobei $|a\rangle$ und $|b\rangle$ den inneren Zustand der Teilchen bezeichnen. Somit ist

$$\begin{aligned} P|\text{Anfang}\rangle &= P|a\rangle \cdot P|b\rangle \cdot P|\text{rel. Bewegung}\rangle \\ &= \pi_a \cdot \pi_b \cdot (-1)^\ell \end{aligned} \quad (3.70)$$

wobei ℓ der relative Bahndrehimpuls zwischen Teilchen a und b ist. Falls die der Reaktion zu Grund liegende Wechselwirkung die Parität erhält, gilt:

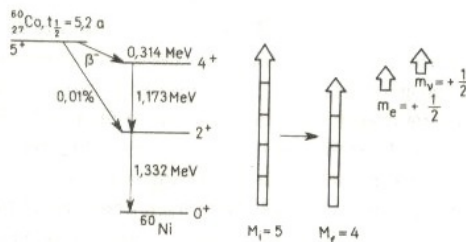
$$\pi_a \cdot \pi_b \cdot (-1)^\ell = \pi_c \cdot \pi_d \cdot (-1)^{\ell'} \quad (3.71)$$

3. Zerfälle instabiler Kerne

Experimentell findet man, dass die Parität erhalten ist bei der starken Wechselwirkung und ebenso bei der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die schwache Wechselwirkung hingegen verletzt die Parität, erste Beispiele hierfür sind der β -Zerfall sowie das Wu-Experiment.

Das Wu-Experiment

Betrachtet wird der Zerfall von ${}^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$, wobei der Kernspin von $J = 5$ zu $J = 4$ übergeht (\rightarrow Gamow-Teller). Die ${}^{60}\text{Co}$ -Kerne werden dabei durch ein starkes B -Feld polarisiert, so dass die Spins entlang der z -Achse ausgerichtet werden. Gemessen wird die Intensität der Elektronen I_1, I_2 in zwei Richtungen 1 und 2.



Zum Wu-Experiment an ${}^{60}\text{Co}$

Abbildung 3.13: Am β -Zerfall von ${}^{60}\text{Co}$ beteiligte Niveaus und zugehörige Spins. (aus Ref. [?])

Der Paritätsoperator lässt den Kernspin unverändert, vertauscht jedoch die Impulse \vec{p}_1 und \vec{p}_2 (falls die Detektoren 1 und 2 auf gegenüberliegenden Seiten der Probe angebracht sind). Die beobachtete Größe bei diesem Experiment ist die *Pseudo-Skalare*

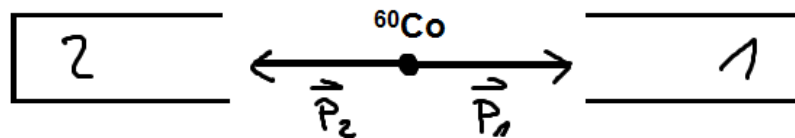


Abbildung 3.14: Prinzipieller Aufbau des Wu-Experiments. An Stelle der Verwendung eines zweiten Elektronendetektors drehte Wu die Richtung des polarisierenden Magnetfeldes um.

$$P_J := \vec{J} \cdot \vec{p} \quad (3.72)$$

d.h.

$$P_J \xrightarrow{P} -P_J \quad (3.73)$$

da \vec{J} ein axialer Vektor und \vec{p} ein polarer Vektor sind. Gemessen wurde die Zählrate für $\vec{J}\vec{p}$ Einstellung sowie die Zählrate für $-\vec{J}\vec{p}$ Einstellung (Im Wu-Experiment:

3. Zerfälle instabiler Kerne

durch Umkehr des Magnetfeldes). Eine Paritätsverletzung liegt vor, wenn der Erwartungswert der pseudo-skalaren Größe J_p nicht verschwindend ist, d.h. falls sich die Zählraten bei den beiden Einstellungen des magnetischen Feldes (signifikant) unterscheiden.

Da die Besetzungszahlen der unterschiedlichen Orientierungen des Kernspins bei Raumtemperatur nahezu ausgeglichen sind, ist es nötig die Messung mittels Kryostat durchzuführen, so dass

$$g\mu_I B \gg k \cdot T \quad (3.74)$$

Somit ist nur das tiefste Zeemann-Niveau besetzt und die Spins zeigen in Richtung des magnetischen Feldes.

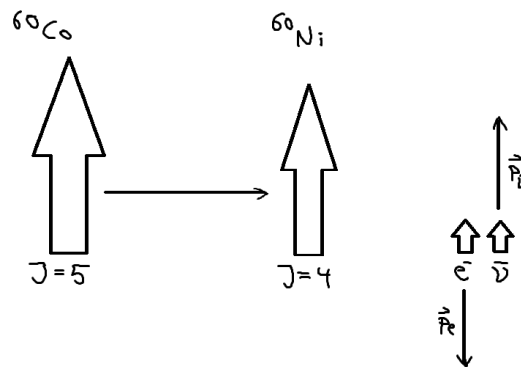


Abbildung 3.15: Spinverteilung bei ^{60}Co -Zerfall. Das Elektron geht bevorzugt gegen die Richtung des Magnetfeldes (negative Helizität).

Es zeigt sich, dass die Elektronen bevorzugt entgegen der Richtung des B -Feldes und damit entgegen der Spin-Richtung entweichen, d.h. der Erwartungswert von P_J nicht verschwindet. Aus dieser Asymmetrie folgt sofort, dass hier Paritätsverletzung vorliegt. Die Elektronen besitzen also negative *Helizität*

$$h = \langle \vec{J} \cdot \vec{p} \rangle \quad (3.75)$$

Als Helizitätsoperator bezeichnet man

$$h := 2 \cdot \frac{\vec{J} \cdot \vec{e}_p}{\hbar} \quad (3.76)$$

wobei \vec{e}_p der Einheitsvektor in Impulsrichtung ist. Je nach Erwartungswert unterscheidet man

$$\begin{aligned} \langle h \rangle &= +1 \text{ positive Helizität, Spin in Flugrichtung} \\ \langle h \rangle &= -1 \text{ negative Helizität, Spin entgegen Flugrichtung} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Die Neutronenhelizität lässt sich beispielsweise im sog. *Goldhaber-Experiment* bestimmen.

3. Zerfälle instabiler Kerne

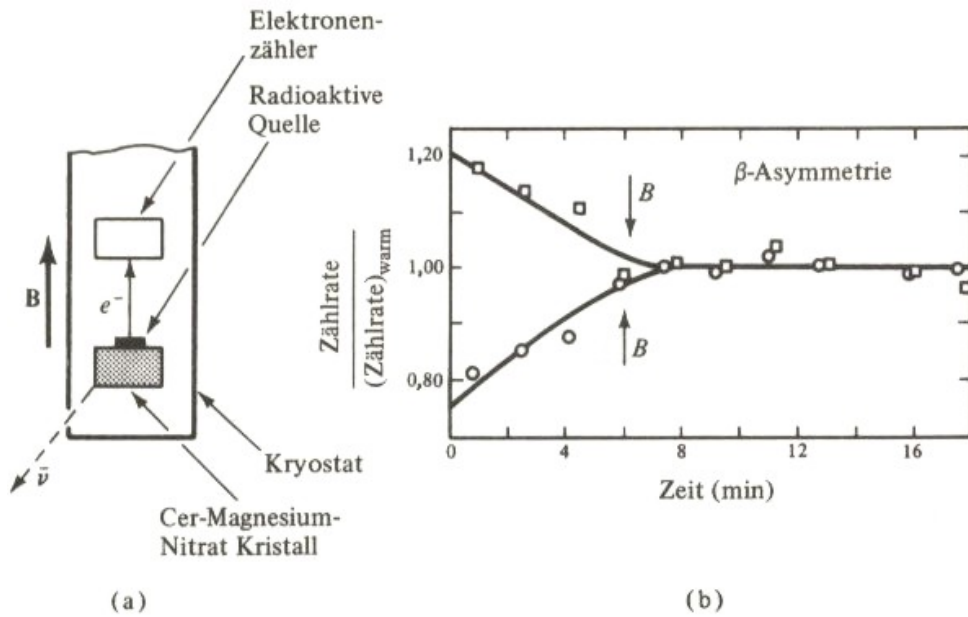


Abbildung 3.16: Aufbau und Ergebnis der Wu-Experiments. (aus Ref. [?])

Die Helizität der Leptonen in Zerfällen, die durch die schwache Wechselwirkung vermittelt werden wurde gemessen zu

$$\begin{aligned} \langle h(e^-) \rangle &= -\frac{v}{c} \\ \langle h(e^+) \rangle &= +\frac{v}{c} \end{aligned} \quad (3.78)$$

⇒ Die schwache Wechselwirkung (β -Zerfall) verletzt die Parität!

3.4 γ -Zerfälle

Unter γ -Zerfällen versteht man die Emission elektromagnetischer Strahlung aus Atomkernen. Dabei geht der Kern aus einem energetisch angeregten Zustand in einen tiefer liegenden Energiezustand über:



Die hierbei frei werdende Energie ist

$$Q = \Delta E = E_i - E_f = E_\gamma = h\nu \quad (3.80)$$

Der Energiebereich für γ -Strahlung (aus Kernprozessen) liegt bei $\sim 100\text{keV} - 10\text{MeV}$. Licht bzw. Röntgenstrahlung, die bei Vorgängen in der Atomhülle auftritt, liegt im

3. Zerfälle instabiler Kerne

Bereich von $\sim 100\text{eV} - 100\text{keV}$ (UV und Röntgen) bzw. im sichtbaren Bereich bei $1\text{eV} - 10\text{eV}$.

Angeregte Kerne können entstehen durch

- (i) α und/oder β -Zerfälle, bei denen die Tochterkerne nicht im Grundzustand entstehen. Die Emission von γ -Strahlung tritt bei diesen Zerfällen als begleitende Erscheinung auf, deren Energie korreliert ist mit der α -/ β -Strahlung.
- (ii) Kernanregung durch Teilchenbeschuss oder Einfangreaktionen. Beispiele:



Die letzte der hier dargestellten Reaktionen wird als (n, γ) -Reaktion bezeichnet, welche große Bedeutung in der nuklearen Energiegewinnung besitzt.

Allgemein befinden sich angeregte Kerne in höheren Rotations- oder Schwingungszuständen der Nukleonen. Angeregte Kerne haben daher im Allgemeinen größere Kernspins I als der Grundzustand. Die Lebensdauer der Zustände umfasst ein breites Spektrum von Jahren bis hin zu 10^{-16}s .

3.4.1 γ -Übergänge, Multipolstrahlung

Vorgegeben sei ein Übergang zwischen Kernniveaus, wobei der Kernspin um ΔI geändert wird und der Paritätsänderung $\Delta\pi$. Diese beiden Änderungen legen den Character (Multipolordnung) der elektromagnetischen Strahlung fest. Sind die Drehimpulse der beteiligten Zustände I_i und I_f , so gilt als Auswahlregel:

$$|I_i - I_f| \leq L \leq |I_i + I_f|, \quad m = m_i - m_f \quad (3.82)$$

L bezeichnet hierbei die Multipolordnung der Strahlung, wozu auch die Multipolarität als 2^L definiert wird. Für $L = 1$ ergibt sich dem entsprechend Dipolstrahlung, für $L = 2$ Quadrupolstrahlung und für $L = 3$ Oktopolstrahlung, sowie analog fortgesetzt für höhere Ordnungen. L entspricht dem Drehimpuls des Strahlungsfeldes und ist ganzzahlig.

In der klassischen Elektrodynamik wird oft eine Multipolentwicklung des elektromagnetischen Strahlungsfeldes mit Hilfe von Kugelflächenfunktionen durchgeführt. In der Quantenelektrodynamik wird eine Quantisierung des elektromagnetischen Feldes eingeführt: Ein zur Multipolordnung L gehörendes γ -Quant transportiert stets einen Drehimpuls vom Betrag $\ell \cdot \hbar$. Für ein γ -Quant ist also auf Grund der transversalen Natur des Lichtes

$$\ell \cdot \hbar \geq 1\hbar \quad (3.83)$$

Lösungen mit $L = 0$ existieren somit nicht, d.h. es gibt keine γ -Übergänge zwischen Kernen mit $I_i = I_f = 0$ (spinlose Kerne)².

²Theoretisch sind Multiphoton-Emissionen möglich, jedoch nur mit sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten

3. Zerfälle instabiler Kerne

Im Spezialfall, dass $I_i = I_f \neq 0$ gilt, ist

$$0 \leq L \leq 2I_i \quad (3.84)$$

wobei $L = 0$ wieder nicht realisiert ist.

Parität:

Die Paritäten der Kernzustände seien π_i und π_f . Es muss nun unterschieden werden zwischen *elektrischer* und *magnetischer* Multipolstrahlung. Die Parität der elektrischen Multipolstrahlung ist

$$\boxed{\pi_E = (-1)^L} \quad (3.85)$$

wohingegen für die magnetische Multipolstrahlung

$$\boxed{\pi_M = -(-1)^L = (-1)^{L+1}} \quad (3.86)$$

Bei der elektromagnetischen Wechselwirkung gilt Paritätserhaltung, so dass folgt

$$\boxed{\begin{array}{ll} \pi_i = (-1)^L \cdot \pi_f & \text{EL-Strahlung} \\ \pi_i = (-1)^{L+1} \cdot \pi_f & \text{ML-Strahlung} \end{array}} \quad (3.87)$$

EL steht dabei für elektrische Multipolstrahlung der Ordnung L , *ML* für magnetische Multipolstrahlung L -ter Ordnung. Ersichtlich wird dies aus den Transformationseigenschaften der Multipolfelder. Für einen elektrischen 2^ℓ -Pol ist

$$\vec{B}_\ell^m = f_\ell(k \cdot r) \vec{L} \cdot Y_\ell^m, \quad \vec{E}_\ell^m = \left(\frac{i}{k}\right) \text{rot} \vec{B}_\ell^m \quad (3.88)$$

und für einen magnetischen 2^ℓ -Pol

$$\vec{E}_\ell^m = f_\ell(k \cdot r) \vec{L} \cdot Y_\ell^m, \quad \vec{B}_\ell^m = -\left(\frac{i}{k}\right) \text{rot} \vec{E}_\ell^m \quad (3.89)$$

wobei $\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$ der Drehimpulsoperator, $k = \omega/c$ die Wellenzahl und $f_\ell(k \cdot r)$ eine Radialfunktion sind. Einige Beispiele für Multipolübergänge sind in Abb. 3.17 dargestellt.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. die Zerfallskonstante λ sind mittels Quantenelektrodynamik (QED) berechenbar im vereinfachten Modell:

Im *Weisskopf-Modell* wird angenommen, dass ein einzelnes Proton (Leucht-Proton) für die Strahlung verantwortlich ist, d.h. dass nur ein einzelnes Proton durch die Emission von Strahlung seinen Quantenzustand ändert.

$$\frac{1}{\tau_E} = \lambda_E = \alpha \cdot \omega \cdot \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{2L} \frac{2(L+1)}{L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \left[\frac{1}{\text{sec}}\right] \quad (3.90)$$

3. Zerfälle instabiler Kerne

wobei die Doppelfakultät $n!!$ bedeutet, dass beispielsweise $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1$ und $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$. Für magnetische Übergänge ist die Übergangswahrscheinlichkeit noch geringer:

$$\frac{\tau_M}{\tau_E} \simeq 4.5 \cdot A^{2/3} \quad (3.91)$$

Für einen Kern mit $A = 100$ ist somit $\tau_M/\tau_E \approx 100$. Die Übergangswahrscheinlichkeit für elektrische und magnetische Übergänge skaliert also mit

$$\lambda \sim \left(\frac{R}{\tilde{\lambda}} \right)^{2L} \quad (3.92)$$

wobei R den Kernradius bezeichnet und $\tilde{\lambda}$ die reduzierte Wellenlänge ($\lambda_{\text{rad}}/2\pi$) der emittierten Strahlung. Höhere Ordnungen sind somit unterdrückt um den Faktor

$$\lambda(L+1) : \lambda(L) \Rightarrow \left(\frac{R}{\tilde{\lambda}} \right)^2 \quad (3.93)$$

Zahlenwerte: Für einen Kern mit $A = 125$ beträgt der Radius ca. $R \sim 6\text{fm}$. Emittiert dieser Strahlung mit der Energie $E_\gamma = 0.5\text{MeV}$, so entspricht dies $\tilde{\lambda} = 400\text{fm}$ und somit einem Unterdrückungsfaktor von

$$\left(\frac{R}{\tilde{\lambda}} \right)^2 \approx 2.2 \cdot 10^{-4} \quad (3.94)$$

In der Atomhülle ist die Unterdrückung noch stärker, beispielsweise ist für ein Atom mit $R \sim 1\text{\AA}$ und $\tilde{\lambda} \approx 1000\text{\AA}$ der Unterdrückungsfaktor

$$\left(\frac{R}{\tilde{\lambda}} \right)^2 \approx 10^{-6}. \quad (3.95)$$

λ zeigt also eine starke L -Abhängigkeit, ebenso wie eine Energieabhängigkeit: λ wird größer für größere γ -Energien. Grundsätzlich gilt

$$\lambda_M < \lambda_E \quad (3.96)$$

wie aus dem Weisskopf-Modell hervorgeht, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines magnetischen Übergangs ist stets kleiner als die eines elektrischen Übergangs der selben Ordnung (sofern der entsprechende Übergang erlaubt ist). Der Unterschied kann in der Größenordnung von $\mathcal{O}(100)$ liegen.

Gemessen werden kann die Multipolarität über die Winkelverteilung der emittierten γ -Quanten.

Anschaulich lässt sich die Unterdrückung mit $\left(\frac{R}{\tilde{\lambda}} \right)^2 = (R \cdot k)^2$ so verstehen, dass eine Fehlanpassung vorliegt. Im Idealfall sollte das Emissionvolumen für die Abstrahlung des Photons eine Ausdehnung von $\sim \frac{\lambda}{2}$ aufweisen. Für $10\text{fm} = 2R \sim \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda \sim$

3. Zerfälle instabiler Kerne

20fm müsste die Energie des γ -Quants $E_\gamma = 63\text{MeV}$ betragen! Typische Energien liegen jedoch im Bereich von $0.5 - 1\text{MeV}$, entsprechen also rund 100 mal größeren Wellenlängen. Mit zunehmender Energie wird diese Fehlanpassung abgemildert, d.h. die Zerfallskonstante steigt mit zunehmender Energie an!

Ebenso kann man klassisch den Drehimpuls betrachten. Der Drehimpuls des γ -Quants, welches im Abstand R_ℓ (orthogonal zum Verbindungsvektor mit dem Kernmittelpunkt) emittiert wird mit Impuls p hat den Drehimpuls

$$|\vec{r} \times \vec{p}| = R_\ell \cdot p = R_\ell \cdot \hbar k \stackrel{!}{=} \hbar L \quad (3.97)$$

d.h.

$$R_\ell \cdot k = L \quad (3.98)$$

Da jedoch $\left(\frac{R}{\lambda}\right) = Rk \ll 1$ ist, liegt auch hier eine Art „Fehlanpassung“ vor. Die Stelle, an welcher sich das Photon am leichtesten Erzeugen ließe, liegt weit außerhalb der Ladungs- und Stromverteilung des Kerns. Diese Diskrepanz verschlimmert sich mit steigendem L .

3.4.2 Konversionsprozesse

Neben γ -Strahlung kann der Kern seine Anregungsenergie durch direkte Übertragung auf ein Elektron der Hülle abgeben:



Die innere Konversion stellt einen Konkurrenzprozess zum γ -Zerfall dar. Da beide Arten von Zerfällen unabhängig voneinander stattfinden, addieren sich die jeweiligen Zerfallskonstanten

$$\lambda = \lambda_K + \lambda_\gamma \quad (3.100)$$

Die innere Konversion tritt insbesondere dann auf, wenn der entsprechende γ -Übergang verboten ist. Man unterscheidet K -, L -, ... Konversionen, je nach dem, auf welches Elektron die Energie übertragen wird. Die Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Prozesses hängt vom Überlapp der Wellenfunktionen von Elektron und Kern ab. Sie ist folglich also am größten für Elektronen der K -Schale. Die kinetische Energie des so emittierten Elektrons ist dann

$$E_{\text{kin}}(e^-) = E_\gamma - E_B(e^-) \quad (3.101)$$

wobei E_B die Bindungsenergie des Elektrons in seinem ursprünglichen Zustand bezeichnet. Die experimentelle Signatur dieses Prozesses ist ein Linienspektrum mit festen e^- -Energien, welches beispielsweise einem kontinuierlichen β -Spektrum überlagert sein kann.

Nach der Emission eines Elektrons der tief liegenden Schalen besteht ein angeregter (Loch-)Zustand der Hülle, welcher begleitende γ -Strahlung oder Auger-Elektronen hervorrufen kann.

3. Zerfälle instabiler Kerne

Experimentell betrachtet man den sog. *Konversionskoeffizient*

$$\alpha := \frac{N_e}{N_\gamma} \sim \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma} \quad (3.102)$$

Die Messung erfolgt beispielsweise durch gleichzeitige β und γ -Messung und liefert somit einen Beitrag zur Bestimmung der Multipolarität des entsprechenden γ -Übergangs. Aus der Messung von α lässt sich auf den Character der Multipolstrahlung schließen. Die Berechnung des Konversionskoeffizienten ist im Allgemeinen schwierig. Für *elektrische* Übergänge ergibt sich für die *K*-Konversion:

$$\alpha_K \approx Z^3 \frac{L}{L+1} \left(\frac{2m_e c^2}{E_\gamma} \right)^{\ell + \frac{5}{2}} \quad (3.103)$$

α_K also nimmt mit höheren Energien (E_γ) (Anregungsenergie) ab, wächst jedoch mit Z^3 (großerer Überlapp mit dem Kern) und bei kleinen Energien stark mit der Multipolordnung an.

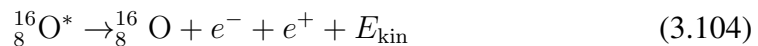
Beispiel:

Für $E_\gamma = 50\text{keV}$ und

- $Z = 33$ ist für den E2-Übergang $\alpha_L = 0.65$
- $Z = 92$ ist für den M5-Übergang $\alpha_L = 8.9 \cdot 10^5$

Innere Paarbildung

Zusätzlich zur γ -Emission und inneren Konversion kann noch ein weiterer Prozess bei der Abregung von Kernen beobachtet werden, die *innere Paarbildung*, sofern die Anregungsenergie $> 2m_e c^2 = 1.022\text{MeV}$ ist. Bei diesen Prozess wird ein e^+e^- -Paar gebildet im Coulombfeld des Kerns. Ein Beispiel für einen solchen Prozess findet sich bei ${}^{16}_8\text{O}^*$ mit einer Anregungsenergie von $E^* = 6.06\text{MeV}$, $I^P = 0^+$. Dieser angeregte Sauerstoffkern geht über zu ${}^{16}_8\text{O}$ mit $I^P = 0^+$.



Eine Emission von zwei γ -Quanten ist möglich, jedoch sehr unwahrscheinlich.

Als *Kernisomere* bezeichnet man langlebige Kernzustände, also Isomere des Grundzustands. Die Ursache für solche langlebigen Zustände liegt im hohen Kernspin der angeregten Zustände, so dass Dipol- und Quadrupolübergänge verboten sind. Auf Grund der hieraus resultierenden hohen Multipolordnung kommt es zu langen Halbwertszeiten.

3.4.3 γ -Spektroskopie

Unter γ -Spektroskopie versteht man die Untersuchung angeregter Kernzustände durch γ -Übergänge. Der Nachweis von γ -Strahlung ist möglich durch

3. Zerfälle instabiler Kerne

- Photoeffekt $\rightarrow e^-$ (scharfer Peak)
- Compton-Streuung $\rightarrow e^-, \gamma$ (Compton-Kante wegen maximalem Energieübertrag bei Rückstreuung unter 180°)
- Paarbildung $\rightarrow e^+ e^-$

Die wichtigsten Messparameter sind

- die Energie E ,
- der Drehimpuls I (und das magnetische Moment μ),
- die Parität π ,
- das magnetische Moment μ ,
- das Quadrupolmoment Q (oder andere Deformationsparameter),
- sowie der Radius R

Die benötigten angeregten Kerne werden über geeignete Kernreaktionen erzeugt, man nutzt also aus, dass Kerne nach einem α - oder β -Zerfall nicht in Grundzustand vorliegen. Durch Energiemessung der ausgesandten α - bzw. β -Teilchen sowie der γ -Quanten und (verzögerte) Koinzidenzmessung kann auf die Lage der Energieniveaus geschlossen werden. Zur Spin/Paritätsbestimmung kann die Multipolarität der γ -Strahlung benutzt werden, die Messung erfolgt dann relativ zum bekannten Grundzustand.

Wie kann der Character der Multipolstrahlung bestimmt werden?

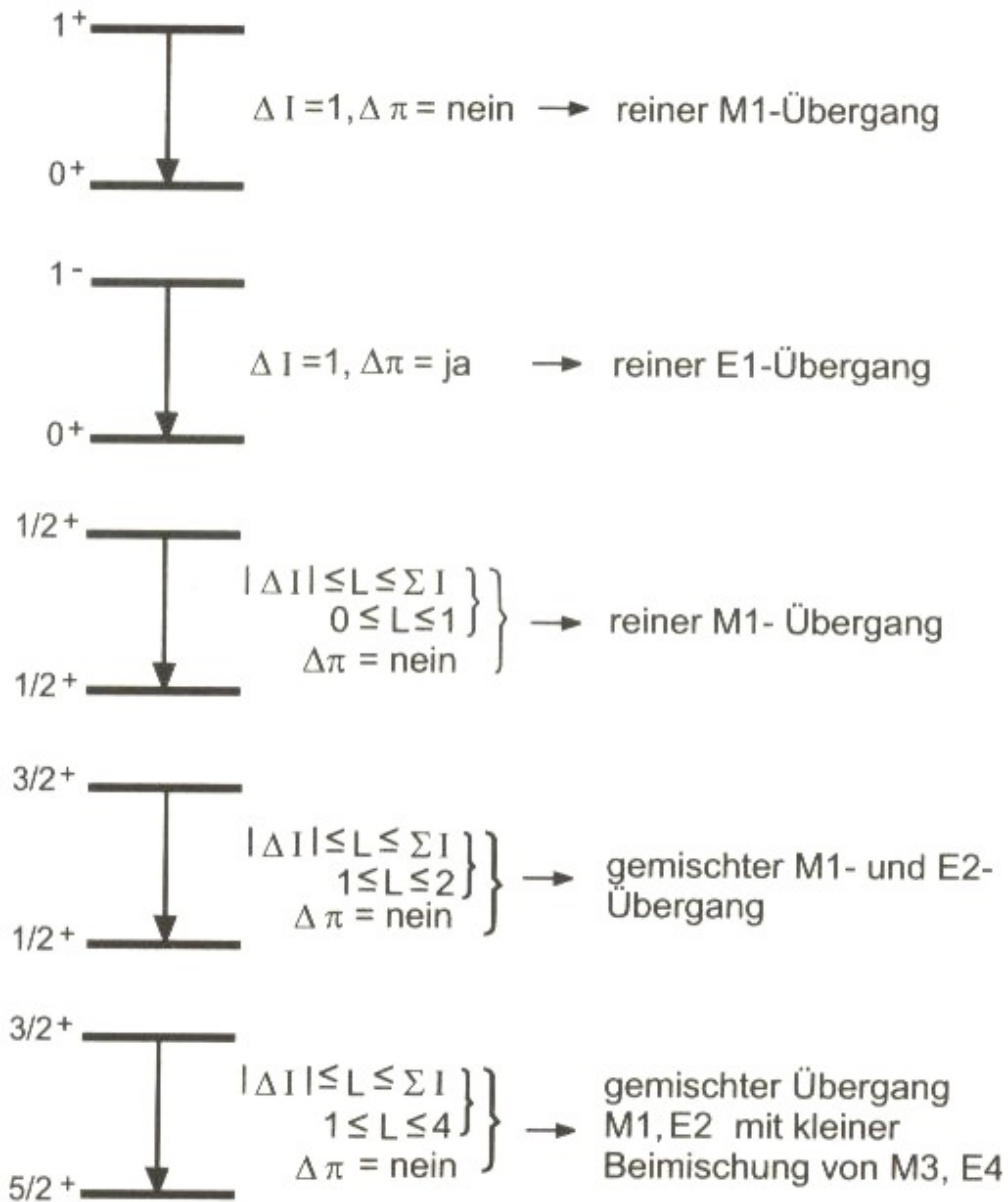
Der Character der Multipolstrahlung kann ermittelt werden durch

- Bestimmung von Konversionskoeffizienten (α ; mit Theorie)
- Messung der Winkelverteilung der Strahlung, diese ist charakteristisch für die Multipolordnung.
 \rightarrow erfordert eine ausgezeichnete Richtung (z -Achse). Tatsächlich gemessen wird die Anzahl der γ -Quanten $N(\vartheta)$ als Funktion des Winkels gegen eine physikalisch ausgezeichnete Achse, die üblicherweise als z -Richtung gewählt wird.
- Die räumliche Intensitätsverteilung ist $\sim |Y_\ell^m|^2$, z.B. $I_1^0 \sim |Y_1^0|^2 \sim \sin^2 \vartheta$ und $I_1^{\pm 1} \sim |Y_1^{\pm 1}|^2 \sim (1 + \cos^2 \vartheta)$
- Definition der Achse:
 - (i) Äußeres Magnetfeld \rightarrow Kernspins richten sich (teilweise) aus

3. Zerfälle instabiler Kerne

- (ii) $\gamma\gamma$ -Winkelkorrelation bei Zerfallskaskaden, die Messung des ersten Photons γ_1 legt eine ausgezeichnete (z -)Richtung fest (siehe Übung). Somit kann der Multipolcharakter der γ_2 -Quanten ermittelt werden. Durch die Festlegung der Emissionsrichtung des ersten Quants werden die magnetischen Unterzustände des Zwischensystems hinsichtlich dieser Richtung verschieden besetzt. Daraus resultiert eine charakteristische Winkelverteilung für das zweite Quant. Für das zweite Quant gilt wieder $\Delta m = \pm 1$ (vgl. Abb. 3.22), da ein Übergang von $m = \pm 1$ nach $m = 0$ stattfindet. Somit ist die Winkelverteilung $\sim |Y_1^{\pm 1}|^2$. Der Vergleich mit theoretischen Vorhersagen ($\frac{dN}{d\vartheta}(\vartheta)$) erlaubt die Bestimmung der Multipolordnung.

3. Zerfälle instabiler Kerne



Beispiele für Multipolübergänge

Abbildung 3.17: Einige Beispiele für Multipolübergänge. Aus Ref. [?]

3. Zerfälle instabiler Kerne

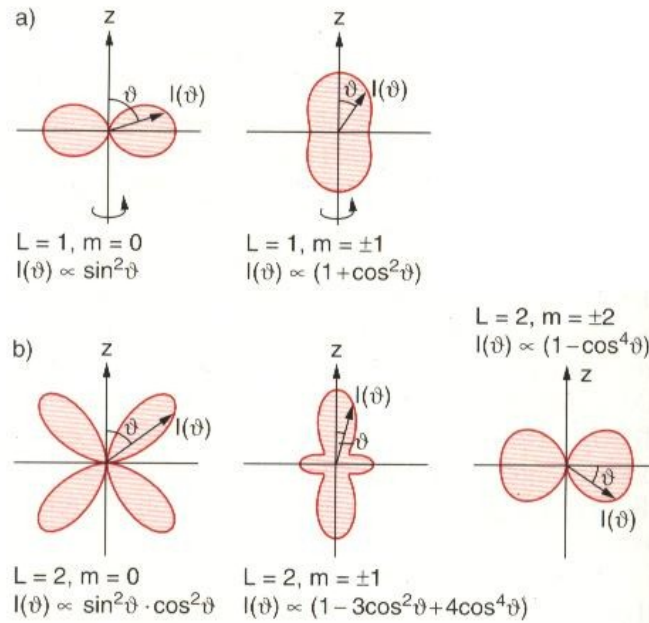


Abbildung 3.18: Richtungsverteilung der Abgestrahlten γ -Intensität für a) Dipol- und b) Quadrupolübergänge. (aus Ref. [12])

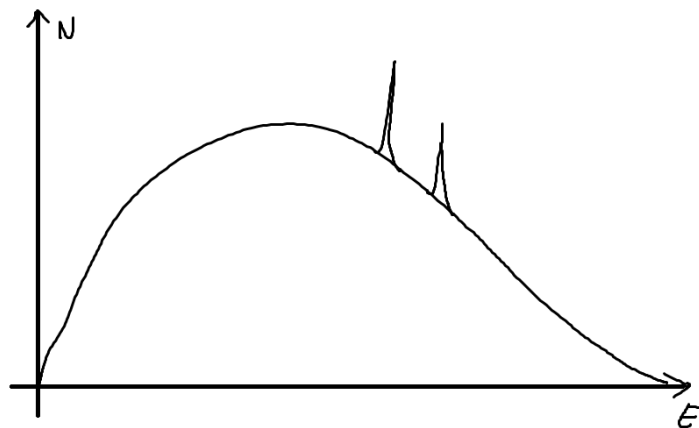


Abbildung 3.19: Linienspektrum der inneren Konversion, überlagert mit kontinuierlichen β -Spektrum

3. Zerfälle instabiler Kerne

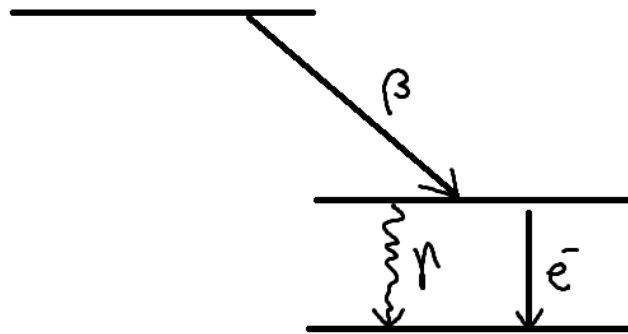
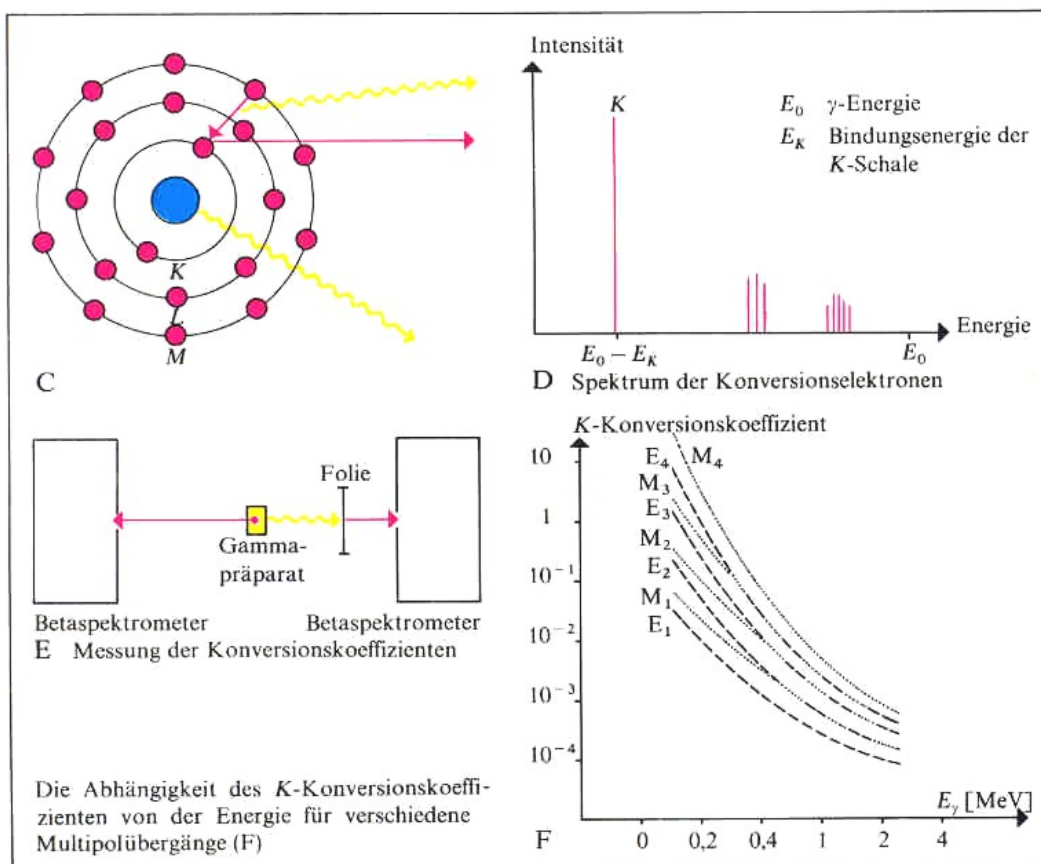


Abbildung 3.20: Beispielsweise nach einem β -Zerfall befindet sich der Tochterkern in einem angeregten Zustand, der sowohl durch γ -Emission, als auch durch innere Konversion in den Grundzustand über gehen kann. Das bei diesem Beispiel gemessene β -Spektrum ist in Abb. 3.19 zu finden.



Innere Konversion und Gammastrahlung

Abbildung 3.21: Zur inneren Konversion. (aus Ref. [?])

3. Zerfälle instabiler Kerne

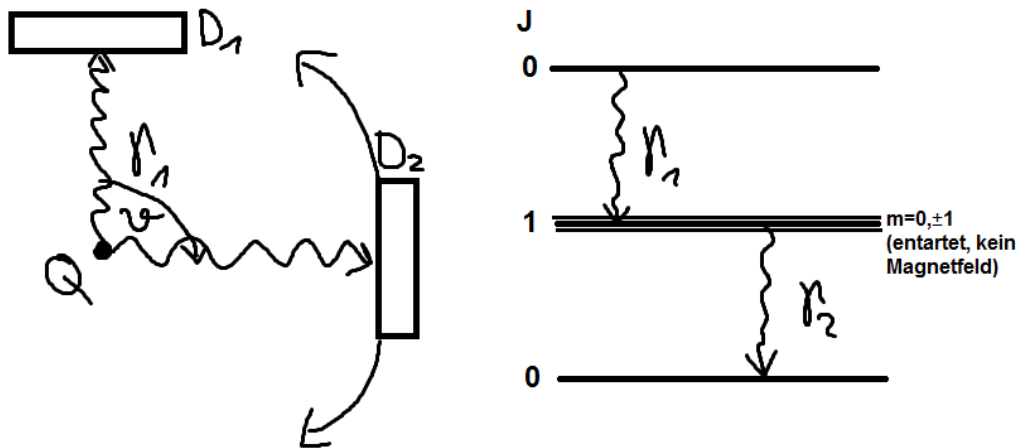


Abbildung 3.22: Zur Messung der $\gamma\gamma$ -Winkelkorrelation. Das erste γ_1 -Quant dient als Trigger für den zweiten Detektor D_2 , der das zweite γ_2 -Quant erfasst. Durch Variation der Position von Detektor D_2 kann die Winkelverteilung gemessen werden. Die Richtung des γ_1 -Quants wird dabei als z -Richtung festgelegt. Bei Dipolstrahlung tragen nur Y_1^1 und Y_1^{-1} bei, da Y_1^0 keine Quanten in z -Richtung emittiert, d.h. Detektor 1 wird nicht getriggert! Im Zwischenzustand werden nur die Niveaus mit den magnetischen Quantenzahlen $m = \pm 1$ besetzt.

3. Zerfälle instabiler Kerne

3.4.4 Mößbauer-Effekt

Der Mößbauer-Effekt wurde benannt nach seinem Entdecker R.Mösbauer (1958). Es handelt sich dabei um die rückstoßfreie Absorption von γ -Quanten an Kernen.

Bei der Resonanzfluoreszenz emittiert ein Atom ein γ -Quant, wobei das Atom/ der Kern den Rückstoß aufnehmen muss um die Impulserhaltung zu erfüllen. Ein anderes, gleichartiges Atom kann dieses Quant absorbieren und nimmt dabei auch den Impuls des Photons auf. Die (Re)Absorption ist jedoch nicht immer möglich: Auf Grund des Rückstoßes des Kerns/Atoms wird ein γ -Quant kleinerer Energie emittiert als dem entsprechenden Übergang entspräche

$$E_\gamma = E_0 - E_R \quad (3.105)$$

Auch bei der Absorption geht auf Grund des Impulsübertrags ein Teil der γ -Energie in die kinetische Energie des absorbierenden Atoms/Kerns. Es bleibt also noch die Energie

$$E''_\gamma = E_0 - 2E_R \quad (3.106)$$

Ob eine Resonanzabsorption stattfindet hängt von den Energieverhältnissen ab; von E_R und der (natürlichen) Linienbreite $\Gamma := \frac{\hbar}{\tau}$. Der natürlichen Linienbreite liegt ein Breit-Wigner-Profil zu Grunde, hinzu kommt noch die Dopplerverbreiterung.

Bei Kernen, beispielsweise ^{57}Fe beträgt die Lebensdauer $\tau = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{s} \Rightarrow \Gamma = 4.7 \cdot 10^{-9} \text{eV}$. Die Energie des Übergangs beträgt $E_\gamma = 14.4 \text{keV}$, so dass die relative Breite $\frac{\Gamma}{E_\gamma} = 3 \cdot 10^{-13}$ beträgt, es liegt also eine extrem scharfe Linie vor! Die Rückstoßenergie kann nun klassisch genähert werden:

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{p^2}{2M} = \frac{(h \cdot \nu)^2}{2Mc^2} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \\ &= 2 \cdot 10^{-3} \text{eV} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Somit ist die Linienbreite hier:

$$\Rightarrow \Gamma = 10^{-6} \cdot E_R, \quad \Gamma \ll E_R \quad (3.108)$$

\Rightarrow Resonanzabsorption sollte an freien Kernen nicht stattfinden.³

Die Dopplerverbreiterung der Linien führt zu einem größeren Überlapp. Die Linienverbreiterung auf Grund des Dopplereffekts, hervorgerufen durch die thermische Bewegung, ist

$$\Gamma_T = 2\sqrt{\ln 2} \cdot E_\gamma \cdot \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}} \quad (3.109)$$

Die Dopplerverbreiterung (bei Raumtemperatur) liegt in der Größenordnung der Rückstoßenergie, so dass ein tatsächlich Resonanzabsorptionen beobachtet werden können.

³Zum Vergleich: Bei Atomen ergibt sich für typische Werte ($\tau \approx 10^{-8} \text{s}$, $\Gamma \approx 10^{-7} \text{eV}$, $E_\gamma \approx 10 \text{eV}$), dass $E_R \approx 10^{-9} \text{eV}$ und somit $\Gamma \approx 10 - 100 \cdot E_R$, so dass Reabsorption hier leicht auftreten kann.

3. Zerfälle instabiler Kerne

Bei tieferen Temperaturen nimmt die thermische Dopplerverbreiterung ab und somit sollte auch die Resonanzabsorption abnehmen.

Durch eine gerichtete Energieverschiebung kann die Verschiebung ausgeglichen werden, beispielsweise durch Bewegung der Quelle mit der Geschwindigkeit v_Q . Es ergibt sich somit

$$\Delta E = \frac{E_\gamma^2}{Mc^2} - E_\gamma \frac{v_Q}{c} \quad (3.110)$$

Der erste Term beschreibt den Rückstoß ($2E_R$, Emission+Absorption), während der zweite Term die Energieverschiebung auf Grund des Doppler-Effekts erfasst. Die

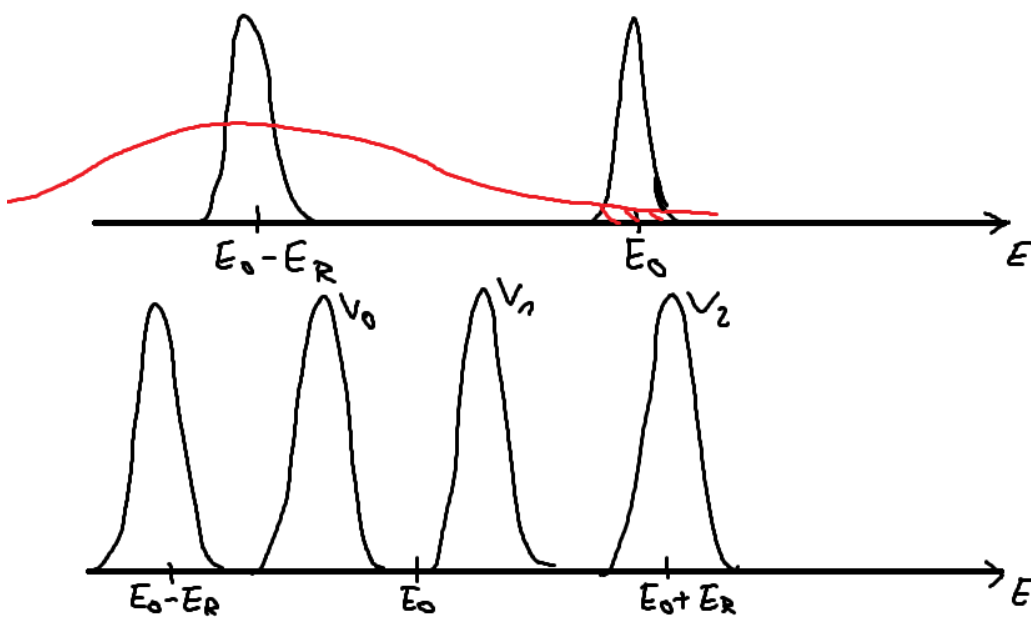


Abbildung 3.23: oben: Auf Grund der Dopplerverbreiterung kommt es zu einem nicht-verschwindenden Überlapp zwischen der Linienbreite und der Breite der γ -Energie. unten: Durch Variation der Geschwindigkeit (z.B. der Quelle) kann die Energie der γ -Quanten gezielt verriert werden.

Messung der γ -Rate als Funktion der Geschwindigkeit v_Q (Durchfluss) führt zu einem Peak bei der Resonanzgeschwindigkeit v_{res} . Der Beweis für rückstoßfreie Absorption ist erbracht bei $v_{res} = 0$.

Mößbauer fand 1958 mit einer ^{191}Ir -Quelle (129keV):

- Resonanzabsorption bei Raumtemperatur (Dopplerverbreiterung + rückstoßfreie Absorption)
- Kühlung des Experiments: Die Resonanzabsorption bleibt erhalten, sie verstärkt sich sogar. Somit fällt die Dopplerverbreiterung als zu Grunde liegender Mechanismus aus. Es handelte sich hierbei um die erste Beobachtung der *rückstoßfreien* Resonanzabsorption an Kernen, die in ein *Kristallgitter* eingebettet sind.

3. Zerfälle instabiler Kerne

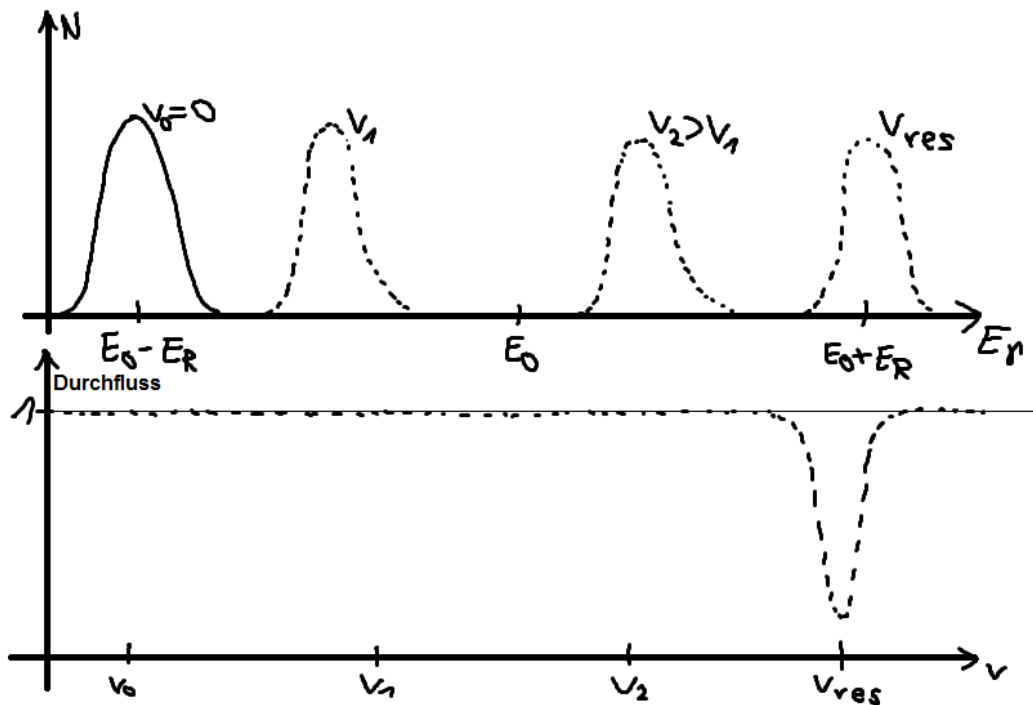


Abbildung 3.24: Oben: Energieverteilung der emittierten γ -Quanten bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Quelle (in Richtung der Emission). Unten: relativer Durchfluss durch den Absorber als Funktion der Geschwindigkeit. Bei $v = v_{res}$ kommt es zur Absorption.

Die Erklärung findet sich in einem Quanteneffekt:

- Atome in Kristallgitter sind durch elastische Kräfte gebunden (\rightarrow schwingungsfähig in drei Dimensionen)
- Schwingungen des Festkörpergitters sind gequantelt, in Einheiten von $\hbar\omega$. Ein Oszillatorquant ist $1\hbar\omega \hat{=} 1$ Phonon.
 - (i) $E_R \gg \hbar\omega \Rightarrow$ Rückstoßenergie wird auf das Gitter übertragen.
 - (ii) $E_R < \hbar\omega$ (für Kerne realistischer Fall: $E_R \sim 0.2 \cdot 10^{-2} \text{eV}$, $\hbar\omega = 10^{-2} \text{eV}$): Die Energie kann nur in Quanten, $\hbar\omega$, abgegeben werden.

Man kann lediglich die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit dafür angeben, dass 0 oder $\hbar\omega$ als Rückstoßenergie übertragen wird.

Die Energie des Gitters ist gequantelt, d.h. es kann die Energie $n \cdot \hbar\omega$ besitzen, ebenso wie $(n + 1)\hbar\omega$ eine mögliche Energie ist. Energien zwischen diesen beiden Werten sind jedoch nicht möglich. Für die oben angegebenen Werte würde also statistisch in 4 von 5 Fällen eine rückstoßfreie Absorption bzw. Emission stattfinden, allgemein lässt sich diese Abschätzung für den Bruchteil der rückstoßfreien Absorptions-/ Emissions-

3. Zerfälle instabiler Kerne

prozesse ausdrücken durch

$$f = 1 - \frac{E_R}{\hbar\omega}. \quad (3.111)$$

Im Einstein-Modell liegt im Gitter nur eine Frequenz vor, in der Realität werden jedoch Abweichungen von den Vorhersagen dieses Modells beobachtet. Gründe hierfür sind:

- mehrere Frequenzen (kompliziertes Schwingungsspektrum)
- natürliche Breite der Phononenlinien

Ein verbessertes Modell, welches auch die spezifische Wärmekapazität und deren Temperaturabhängigkeit von Festkörpern erklären kann, ist das Debye-Modell.

$$\Rightarrow f = f(T, \text{Material}) \quad (3.112)$$

wird als *Debye-Waller-Faktor* bezeichnet. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist ^{57}Fe

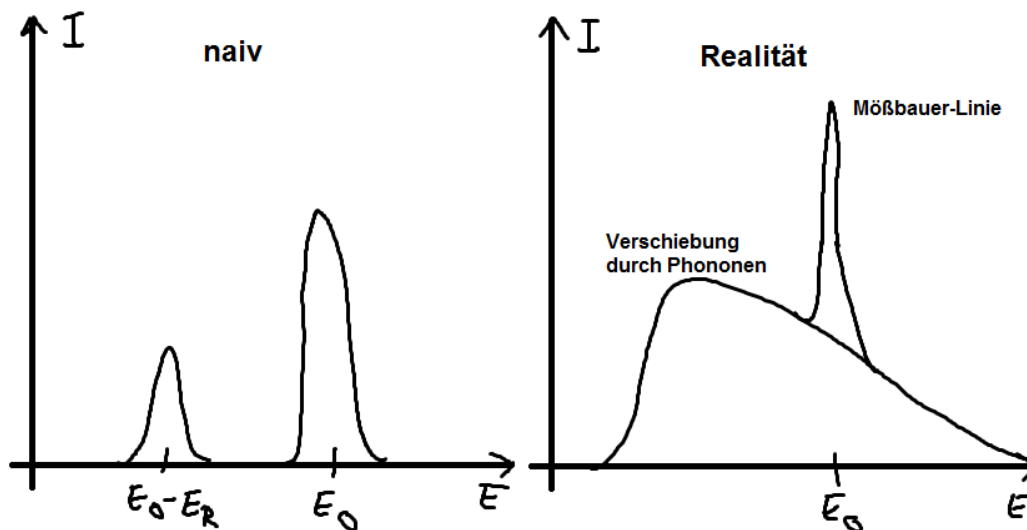


Abbildung 3.25: naive Erwartung des γ -Spektrums nach Einstein-Modell, sowie real beobachtetes Spektrum, welches sich durch das Debye-Modell erklären lässt

(14.4keV, γ -Linie), wofür bei $T = 300\text{K}$ der Debye-Wallerfaktor $f = 0.91$ beträgt. In vielen Fällen müssen Quelle und Absorber jedoch gekühlt werden, um hinreichend große Werte für f zu erhalten.

Anwendungen

- Spektroskopie (kleine Energieverschiebungen, z.B. Hyperfeinstruktur, Quadrupolmomente, Isomerieverschiebung (chem. Umgebung)). Die Energieverschiebung ist über die Geschwindigkeit kontrollierbar: $\Delta E = E_\gamma \frac{v_Q}{c}$. Die messbaren Breiten zweier Mössbauerlinien sind

3. Zerfälle instabiler Kerne

$$\begin{aligned} - \text{}^{57}\text{Fe}: \frac{\Gamma}{E_\gamma} &= 3 \cdot 10^{-13} \\ - \text{}^{67}\text{Zn}: \frac{\Gamma}{E_\gamma} &= 5 \cdot 10^{-16} \end{aligned}$$

- Test der Relativitätstheorie: Mit Hilfe der Mößbauerspektroskopie kann die Energieverschiebung von Photonen im Schwerfeld der Erde gemessen werden. Die Energieverschiebung pro Meter Höhendifferenz liegt in der Größenordnung

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-16} \quad (3.113)$$

Beispielsweise ist die Verschiebung der ^{57}Fe -Linie bei einer Höhendifferenz von 23m

$$\frac{\Delta E}{E} = 5 \cdot 10^{-16} \quad (3.114)$$

3.5 Kernspaltung

1938 Die Entdeckung der Kernspaltung erfolgt durch O.Hahn, F.Straßmann.

1939 Theoretische Interpretation zu den Ergebnissen des Vorjahres durch Liese Meitner und O. Frisch. An der Interpretation im Tröpfchenmodell ebenfalls beteiligt waren Bohr und Wheeler.

1942 Erste kontrollierte Kettenreaktion (E.Fermi, Chicago)

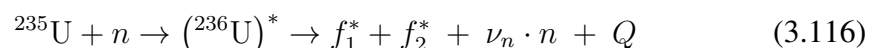
Die Spaltung schwerer Kerne bringt einen Energiegewinn mit sich, vergleichbar mit dem α -Zerfall. Die Kernspaltung wird durch eine dynamische Instabilität hervorgerufen, auf Grund einer Anregung z.B. durch γ - oder Neutronenbeschuss. Es kommt in Folge dessen zu Schwingungen und Deformationen des Kerns, so dass die Coulombabstoßung zur Spaltung führt. Besonders gut funktioniert dies bei Kernen, welche bereits im Grundzustand deformiert sind.

Potentialverhältnisse

Zur Separation der beiden „Prototöchter-Kerne“ muss die Oberfläche vergrößert werden → Es muss Arbeit aufgewandt werden. Dem Bestreben zur Minimierung der Oberfläche entgegen wirkt die Abnahme der Coulomb-Energie, da die Protonen im Mittel weiter voneinander entfernt sind. Wenn $R > R_{\text{sci}}$ (Szissionspunkt) ist, überwiegt die Coulomb-Abstoßung und führt zur Spaltung. Der Q -Wert ergibt sich aus der Differenz der Bindungsenergien, welche in Form von kinetischer Energie frei wird.

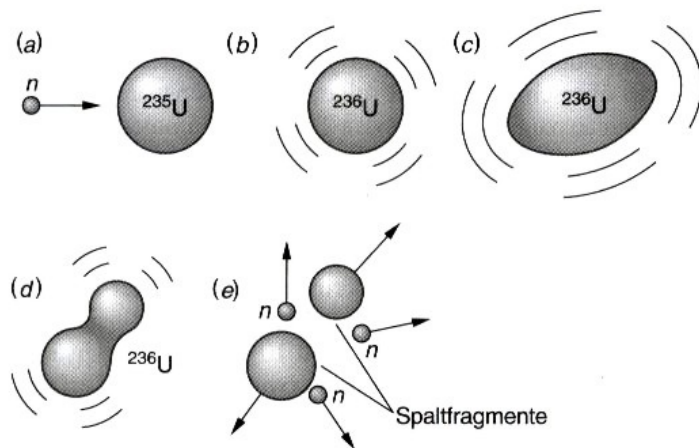
$$Q = (m_i - m_f)c^2 \quad (3.115)$$

Beispiel:



wobei f_1^* und f_2^* die (angeregten) Spaltprodukte sind und ν_n die freiwerdenden *prompten* Neutronen. Bei einer solchen Reaktion werden freigesetzt:

3. Zerfälle instabiler Kerne



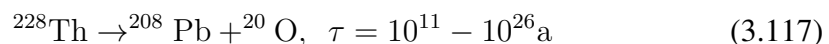
Schema einer Kernspaltung. Die Absorption eines Neutrons durch ^{235}U (a) führt zu einem angeregten Zustand von ^{236}U (b). Dieser angeregte Kern wird durch Schwingungen verformt (c), der schwingende Kern wird instabil (d) und zerfällt in zwei Bruchstücke (e) mittlerer Massenzahl unter Emission mehrerer Neutronen, die ihrerseits die Spaltung weiterer Kerne auslösen können.

Abbildung 3.26: (aus Ref. [10])

- hochangeregte Spaltprodukte
- prompte Neutronen
- Q = frei werdende Energie $\sim 200\text{MeV}$ pro Spaltung

Die prompten Neutronen werden von den hoch angeregten Spaltprodukten „abgedampft“.

Beachte: Die Spaltung passiert auf Grund einer Anregung/Verformung, nicht durch Tunneleffekt! Theoretisch ist eine Spaltung durch Tunneleffekt möglich, jedoch ist die Wahrscheinlichkeit in der Praxis sehr klein. Einen Übergangsbereich bildet die *Cluster-Emission*, welche auch beobachtet werden kann, z.B.:



Energieverhältnisse bei Spaltung nach Tröpfchenmodell

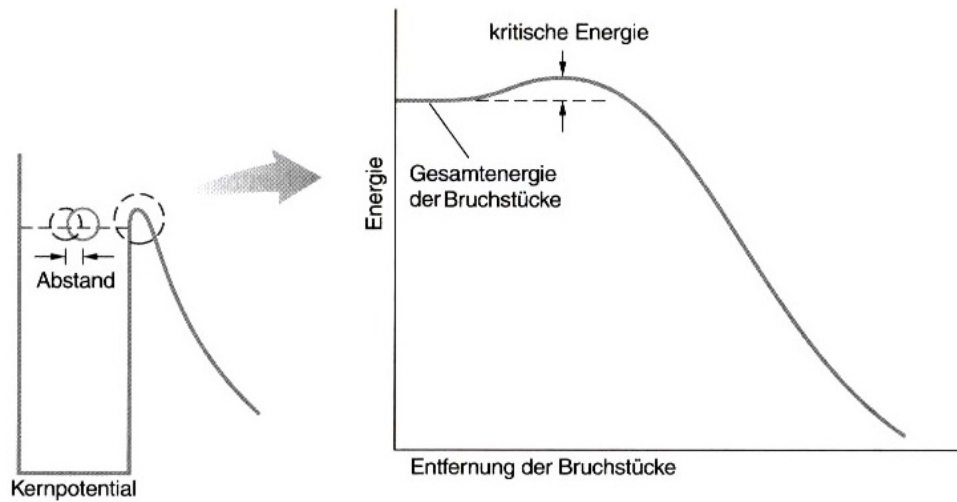
Nach dem Tröpfchenmodell treten zwei konkurrierende Energiebeiträge beim Übergang von einem sphärischen Kern zu einem verformten Kern auf:

- Oberflächenenergie
- Coulombenergie

Geht eine Kugel mit Radius R in einen Ellipsoiden über, so erhält man für die Halbachsen des Ellipsoiden mit identischem Volumen wie die ursprüngliche Kugel:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3 &= V_{\text{Kugel}} = V_{\text{Ellipsoid}} = \frac{4}{3}\pi ab^2 \\ \Rightarrow a &= R(1 + \epsilon) \\ b &= \frac{R}{\sqrt{1 + \epsilon}} \approx R \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.118)$$

3. Zerfälle instabiler Kerne



Einen winzigen Augenblick lang kann der Kern als Verbund zweier Fragmente existieren (links); die Coulombbarriere verhindert jedoch die endgültige Trennung der Bruchstücke. Um die Barriere zu überwinden, muß dem System mindestens die kritische Energie zugeführt werden.

Abbildung 3.27: (aus Ref. [10])

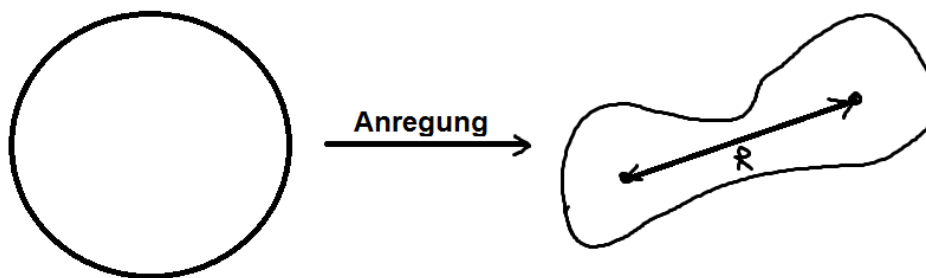


Abbildung 3.28: Die Anregung eines Kerns kann zu Schwingungen und Deformationen führen

Die Oberfläche ist dann gegeben durch

$$O = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 + \dots \right), \quad (3.119)$$

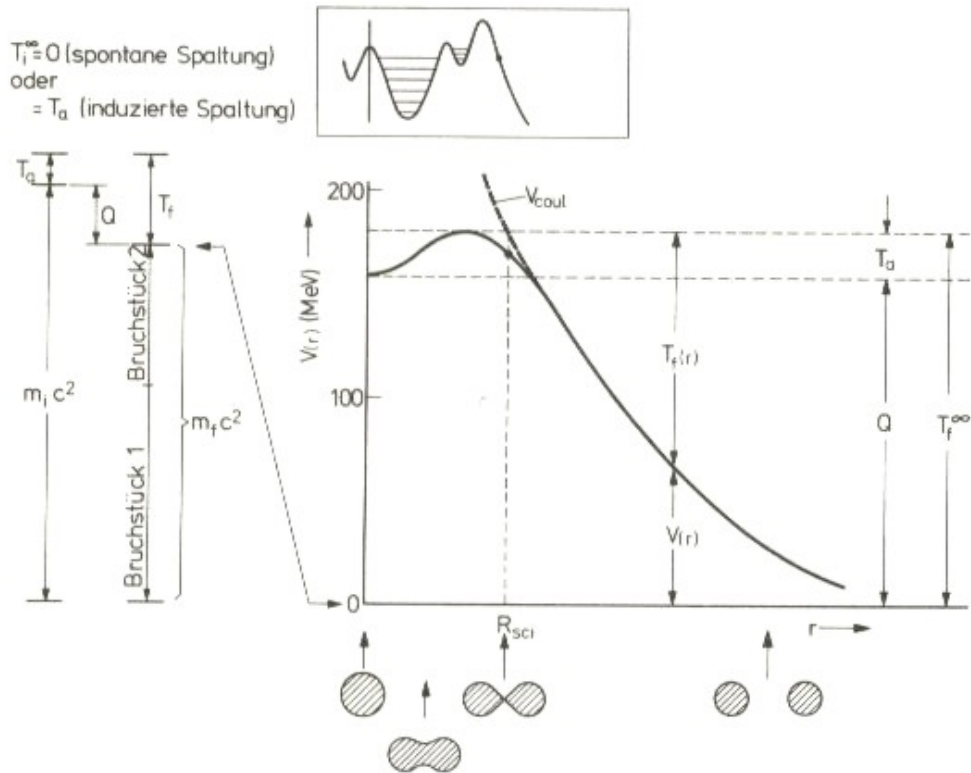
so dass die Differenz der Oberflächenenergien beim Übergang von einer Kugel zu einem Ellipsoiden

$$\Delta_{B,O} = a_O \cdot A^{2/3} \cdot \frac{2}{5}\epsilon^2 \quad (3.120)$$

und die Coulombenergie eines solchen, homogen geladenen Ellipsoid erhält man zu

$$E_C \sim \frac{Z^2}{R} \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 + \dots \right), \quad (3.121)$$

3. Zerfälle instabiler Kerne



Energieverhältnisse und Potentialverlauf bei der Spaltung. Links: Energiediagramm. Rechts: Potentialverlauf nach dem Tröpfchenmodell. Oben eingerahmt: Detail des Potentialwalls für die realistischere Beschreibung nach dem Spaltungs-Hybrid-Modell. Der Grundzustand ist hier deformiert

Abbildung 3.29: Energieverhältnisse bei der Spaltung. Aus Ref. [10]

d.h. die Energiebeiträge lauten

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{B,O} &= a_O \cdot A^{2/3} \cdot \frac{2}{5} \epsilon^2 \\
 \Delta E_{B,C} &= -a_C \frac{1}{5} \epsilon^2 Z^2 \cdot A^{-1/3} \\
 \Rightarrow \Delta E &= \epsilon^2 \left(\frac{2}{5} a_O \cdot A^{2/3} - \frac{1}{5} a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} \right)
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

mit den Werten für die Parameter aus dem Tröpfchenmodell

$$a_O = 18.34 \text{ MeV}, \quad a_C = 0.71 \text{ MeV} \tag{3.123}$$

ergibt sich

$$\Delta E = \epsilon^2 \left(7.34 \cdot A^{2/3} - 0.14 \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} \right) \tag{3.124}$$

3. Zerfälle instabiler Kerne

Tabelle 3.2: Spaltbarkeitsparameter und Halbwertszeiten einiger Kerne

Kern	X	$T_{1/2}$ (Spaltung)
${}_{92}^{238}\text{U}$	0.71	10^{16}a
${}_{98}^{252}\text{Cf}$	0.76	85a
${}_{102}^{258}\text{No}$	0.80	1.2ms

Für Spaltung muss $\Delta E < 0$ sein, so dass die Bedingung für spontane Spaltung lautet

$$\boxed{\frac{Z^2}{A} \gtrsim 51} \quad (3.125)$$

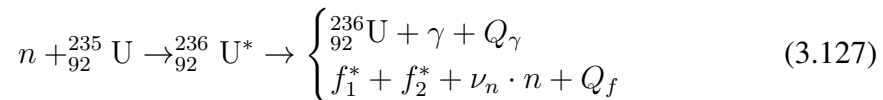
Man definiert hierbei den *Spaltbarkeitsparameter*

$$X := \frac{Z^2}{51 \cdot A} \quad (3.126)$$

Je kleiner X ist, um so größer ist die Halbwertszeit für spontane Spaltung. Der kritische Wert für spontane Spaltung wird erst für $Z > 100$ erreicht. Das hierbei verwendete Modell ist jedoch zu naiv, eine realistischere Rechnung erlaubt spontane Spaltung für $X \gtrsim 0.80$ (Die Näherung kleiner Deformationen ist nicht erfüllt, wenn der Kern sich einschnürt)

Induzierte Spaltung

Durch Kernreaktionen (n, γ, \dots) kann eine Spaltung induziert werden, z.B. Neutroneneinfang:



- Die Anlagerungsenergie eines Neutrons an ${}_{92}^{235}\text{U}$ beträgt $\Delta E_B = 6.5\text{MeV}$.
- Die Höhe der Spaltbarriere beträgt $\Delta E_{\text{Spalt}}({}_{92}^{235}\text{U}) = 5.8\text{MeV}$, d.h. thermische⁴ Neutronen können den Kern zur Spaltung bringen.
- nicht jeder Neutroneneinfang führt zur Spaltung, es handelt sich um einen konkurrierenden (n, γ)-Prozess.
- $\Delta E_B({}_{92}^{235}\text{U})$ ist groß, da ${}_{92}^{236}\text{U}_{144}$ ein gg-Kern ist (zusätzliche Bindungsenergie durch Paarungsenergien).
- Zum Vergleich: $n + {}_{92}^{238}\text{U}_{146} \rightarrow {}_{92}^{239}\text{U}_{147}$ (d.h. ein gg-Kern wird zu einem gu-Kern), die Bindungsenergie des zusätzlichen Neutrons beträgt $\Delta E_B = 5.0\text{MeV}$, die Spaltbarriere⁵ jedoch bei $\Delta E_{\text{Spalt}} = 6.2\text{MeV}$. Um eine Spaltung zu induzieren muss das Neutron zusätzliche kinetische Energie auf den Kern übertragen,

⁴Bei Raumtemperatur ist $E_{\text{th}} = kT \approx \frac{1}{40}\text{eV}$. Durch Zusammenstöße mit der Umgebung wird so viel Energie abgegeben, dass sich die Neutronen im thermischen Gleichgewicht befinden.

⁵Die Höhe der Spaltbarriere kann durch Messung der Spaltwahrscheinlichkeit als Funktion der Neutronenenergie experimentell bestimmt werden.

3. Zerfälle instabiler Kerne

$E_{\text{kin}}(n) > 1.2\text{MeV}$. Die Differenz der Bindungsenergien zwischen ^{235}U und ^{238}U auf Grund der Paarungsenergie ist nach dem Tröpfchenmodell

$$a_P = 11.46\text{MeV}/c^2$$

$$\delta = \frac{a_P}{\sqrt{A}} \approx \frac{11.46\text{MeV}}{\sqrt{238}} = 0.74\text{MeV} \quad (3.128)$$

$$\Delta E_B \sim 2\delta \approx 1.5\text{MeV}$$

Einige Zahlenwerte:

	$\Delta E_{\text{Spalt}}/\text{MeV}$	$\Delta E_B/\text{MeV}$	Spaltbarkeit (therm. Neutronen)
^{233}U	5.2	6.7	ja
^{235}U	5.8	6.5	ja
^{238}U	6.2	5.0	nein
^{239}Pu	5.0	6.4	ja

Abregung der Spaltprodukte

Die Anregungsenergie der Spaltprodukte liegt bei $\sim 30\text{MeV}$, die Bindungsenergie eines Neutrons in diesen Kernen nur bei $E_B(n) \sim 6 - 7\text{MeV}$. Eine Abregung der Spaltprodukte ist somit möglich durch

- (1) prompte Neutronenemission. Die Emission erfolgt nach der Spaltung (Richtungskorrelation mit Spaltprodukten), $\Delta t = 10^{-21} - 10^{-14}\text{s}$ (nach Spaltung). Man spricht daher von *prompten Neutronen* oder auch *Spaltungsneutronen*. Ihre Anzahl liegt in etwa bei $\nu_n = 2 - 3$. Statistisch werden bei

$$\begin{aligned} ^{235}\text{U} & \quad \nu_n = 2.43 \\ ^{238}\text{U} & \quad \nu_n = 2.88 \end{aligned} \quad (3.129)$$

prompte Neutronen emittiert. Diese bilden die Grundlage für Kettenreaktionen.

- (2) γ -Zerfällen
- (3) β -Zerfälle: Der Neutronenüberschuss wird durch mehrere aufeinanderfolgende β^- -Zerfälle abgebaut:

$$\boxed{n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e} \quad (3.130)$$

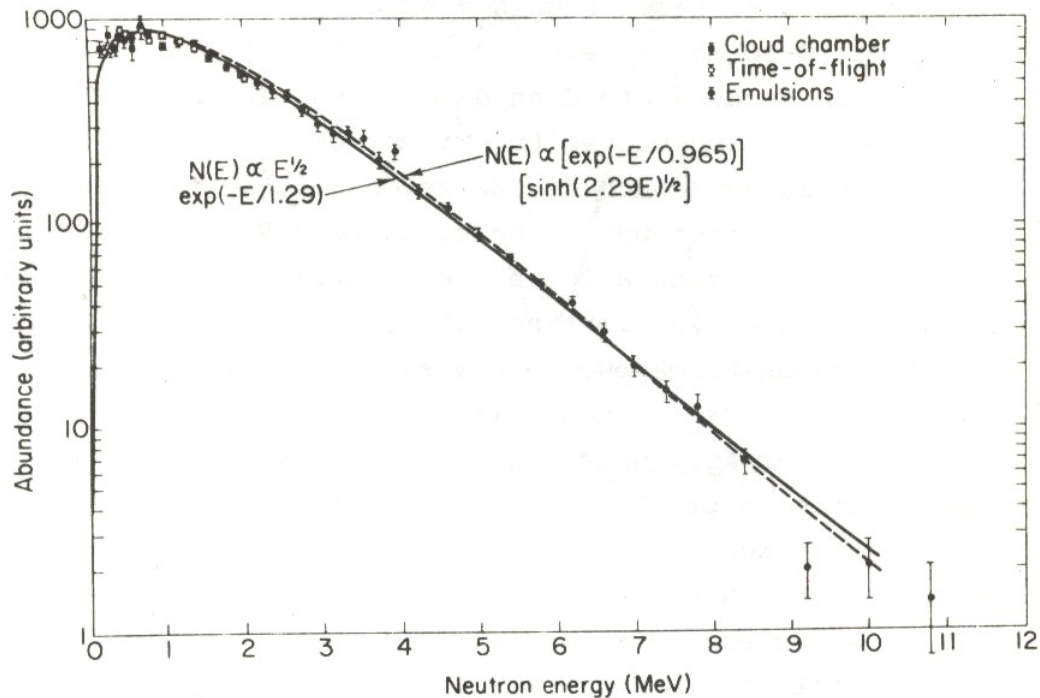
- (4) Falls die Anregungsenergie nach dem β -Zerfall groß genug ist, kann es zur Emission weiterer Neutronen kommen (verzögerte Neutronen).

Ein Energiespektrum von Spaltungsneutronen ist in Abb. 3.30 dargestellt. Das Energiespektrum wird beschrieben durch eine Funktion der Form

$$n(E) = a \cdot \sqrt{E} \cdot e^{-E/T} \quad (3.131)$$

Die wahrscheinlichste Energie liegt bei $\sim 0.8\text{MeV}$, der Erwartungswert der Energie bei $\langle E \rangle \sim 2\text{MeV}$.

3. Zerfälle instabiler Kerne



Energiespektrum der Spaltneutronen

Abbildung 3.30: Energieverteilung der prompten Spaltneutronen. (aus Ref. [13])

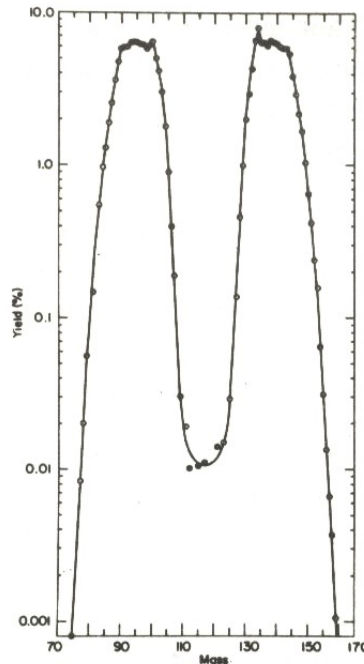
- Die Massenverteilung der Spaltprodukte ist im Allgemeinen asymmetrisch. Eine symmetrische Verteilung tritt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 10^{-3} auf. Der Grund hierfür lässt sich im Schalenmodell finden. Die Wahrscheinlichkeit einer symmetrischen Spaltung nimmt zu mit
 - zunehmender Masse des Spaltkerns
 - zunehmender Anregungsenergie
- Im Verlauf der Abregungsprozesse entstehen zahlreiche Kerne/Zwischenprodukte (~ 80 Zwischenprodukte) mit Halbwertszeiten von Sekunden bis hin zu 10^{10} a!
- Lagsame radioaktive Zerfälle führen zur sog. *Nachwärme* in Kernreaktoren.

Technische Anwendung: Kernreaktor

Nachfolgend sollen noch einige Aspekte der Funktionsweise eines Kernreaktors diskutiert werden.

- Die Kettenreaktion kann kontrolliert ablaufen, wenn im Mittel 1 Neutron je Spaltung zu weiteren Spaltprozessen genutzt werden kann

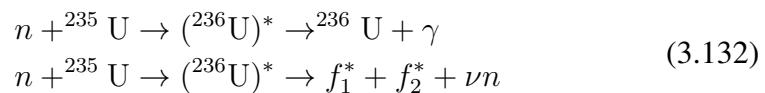
3. Zerfälle instabiler Kerne



Massenverteilung der Spaltprodukte für induzierte Spaltung von ^{235}U mit thermischen Neutronen

Abbildung 3.31: (aus Ref. [13])

- Die Wichtigsten Neutronenreaktionen sind



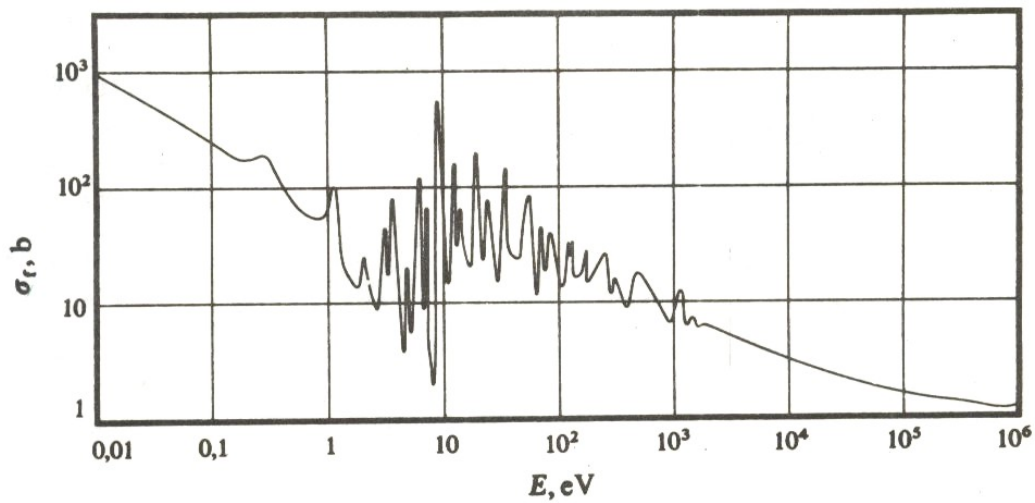
mit den Wirkungsquerschnitten $\sigma(n, \gamma)$ bzw. $\sigma(n, f)$ (fission). Im ersten Fall ist das Neutron für die Kettenreaktion verloren. Die Wirkungsquerschnitte für induzierte Spaltung und (n, γ) -Reaktionen hängen stark von der kinetischen Energie bzw. Geschwindigkeit v der Neutronen ab. Im thermischen Bereich gilt:

$$\sigma(n, \gamma), \sigma(n, f) \sim \frac{1}{v} \quad (3.133)$$

Die Wirkungsquerschnitte sind in diesem Bereich dominiert durch die Zeit, während der sich das Neutron in der Umgebung des Kerns aufhält ($t = \frac{s}{v} \Rightarrow \frac{1}{v}$ -Abhängigkeit).

- Im mittleren Energiebereich treten Resonanzen auf, entsprechend der Energiezustände des sog. *Compound-Kerns*.

3. Zerfälle instabiler Kerne



Wirkungsquerschnitt für n-induzierte Spaltung am ^{235}U

Abbildung 3.32: Wirkungsquerschnitt für (n, f) -Reaktion mit ^{235}U in Abhängigkeit von der kinetischen Energie der Neutronen. (aus Ref. [13])

Tabelle 3.3: Einige Wirkungsquerschnitte für 2MeV-Neutronen

		$\sigma(n, n')/b$	$\sigma(n, \gamma)/b$
H ₂ O	leichtes Wasser	105	0.664
D ₂ O	schweres Wasser	14.5	0.001
C	Graphit	4.8	0.0035

- Um die hohen Spaltquerschnitte im thermischen Energiebereich auszunutzen, müssen die Neutronen ($\langle E \rangle \sim 2\text{MeV}$) moderiert werden. → Moderation (Abkühlung) der Neutronen durch Stöße
- Gesucht: Materialien mit kleinem Absorptionsquerschnitt $\sigma(n, \gamma)$ und großen Streuquerschnitt $\sigma(n, n')$ (elastische Streuung, Energieabgabe). Ein solches Material wird als *Moderator* bezeichnet. Um eine effiziente Energieabgabe (d.h. Abkühlung) mit möglichst wenigen Stößen (Einfanggefahr!) zu erreichen sollte

$$m_{\text{Stoßpartner}} \approx m(n) \quad (3.134)$$

sein.

- H₂O (Leichtes Wasser) besitzt zwar einen besonders großen Wirkungsquerschnitt für die Streuung der Neutronen, jedoch auch einen großen Wirkungsquerschnitt für die Absorption von Neutronen. Schweres Wasser(D₂O) besitzt für beide Reaktionen einen deutlich verringerten Wirkungsquerschnitt, wobei der Wirkungs-

3. Zerfälle instabiler Kerne

querschnitt der Absorption wesentlich stärker unterdrückt ist. Durch den hohen Wirkungsquerschnitt von leichtem Wasser ist mit natürlichen Uran kein Leichtwasserreaktor möglich! Natürliches Uran enthält zu ca. 0.72% ^{235}U . Die Anzahl der zur Spaltung verfügbaren Neutronen ist

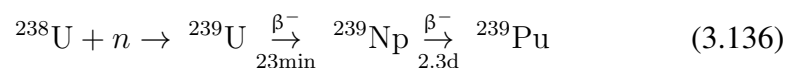
$$k = 2.4 \cdot \frac{\sigma(n, f)}{\sigma(n, f) + \sigma(n, \gamma)} \approx 1.32 \quad (3.135)$$

Durch weitere Verluste (z.B. durch Neutronen, die den Reaktor verlassen) sinkt die Anzahl weiter ab: $k_{\text{eff}} < 1$. Eine Kettenreaktion in einem Leichtwasserreaktor ist somit mit natürlichen Uran nicht möglich!

- Durch Anreicherung, d.h. durch Erhöhung des ^{235}U -Anteils auf $\sim 3\%$, erreicht man $k = 1.82$. Somit ist der Betrieb mit $k_{\text{eff}} > 1$ bei leichtem Wasser als Moderator möglich!
- Schwerwasserreaktoren (mit D_2O als Moderator) können mit natürlichen Uran arbeiten (keine Anreicherung notwendig). Der Vorteil von Leichtwasserreaktoren ist jedoch der größere Wirkungsquerschnitt $\sigma(n, n')$, so dass die Moderation schneller erfolgt und eine kompaktere Bauweise erlaubt (Druck- oder Siedewasserreaktoren).
- Was passiert, wenn nicht schnell moderiert wird?
 - Gefahr, dass zu viele Neutronen im sog. *epithermischen Bereich* (10 – 1000eV) eingefangen werden
 - Resonanzen für ^{238}U und ^{235}U in diesem Bereich, $\sigma(n, \gamma)$ -Resonanzen mit hohen Wirkungsquerschnitten, Neutronen sind verloren für den Neutronenhaushalt des Reaktors \rightarrow Eine schnelle Moderation ist wünschenswert, um das Resonanzgebiet schnell zu durchlaufen.

- Brutreaktionen:

Durch n -Einfang von ^{238}U entsteht Plutonium



Die Lebensdauer von ^{239}Pu beträgt $\tau = 2.4 \cdot 10^4\text{a}$! Es kommt somit zu einer langsamen Anreicherung in den Brennelementen

- Wiederaufbereitung:

^{239}Pu und nicht abgebranntes ^{235}U sowie Reaktorgifte werden extrahiert. ^{239}Pu ist spaltbar, es besitzt einen hohen Spaltquerschnitt für schnelle Neutronen \rightarrow Konzept des sog. *schnellen Brütters* (Kalkar, 1970er Jahre, BRD). Es ist somit kein Moderator erforderlich, zudem weißt ^{239}Pu mit $\nu = 2.7$ eine hohe Zahl an Spaltungsneutronen auf).

3. Zerfälle instabiler Kerne

Die Gefährlichkeit (wesentliche Sicherheitsprobleme) haben bisher den verbreiteten Einsatz schneller Brüter verhindert:

- hohe Anzahl prompter Spaltneutronen
- geringe Anzahl verzögerter Neutronen (nur 0.3%!) \Rightarrow kurze Sicherheitsabstände für mechanische Steuerung
- Verdopplung des spaltbaren Materials im Reaktor alle ~ 7 Jahre

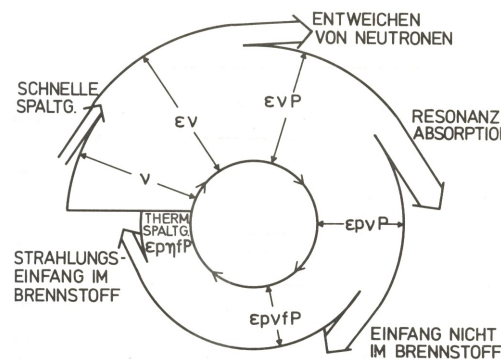
Reaktorgifte:

Einige Spaltprodukte (die unkontrolliert auftreten) haben hohe n -Einfangquerschnitte:

Reaktorgift	Wirkungsquerschnitt	$\tau_{1/2}$
^{149}Sm	$\sigma(n, \gamma) = 4 \cdot 10^4 \text{b}$	stabil
^{135}Xe	$\sigma(n, \gamma) = 2.7 \cdot 10^6 \text{b}$	9.2h
^{113}Cd	$\sigma(n, \gamma) = 2 \cdot 10^4 \text{b}$	$7.6 \cdot 10^{15} \text{a}$

• Neutronenzyklus

Im Neutronenzyklus (vgl. Abb. 3.33) ist dargestellt, durch welche Prozesse Neu-



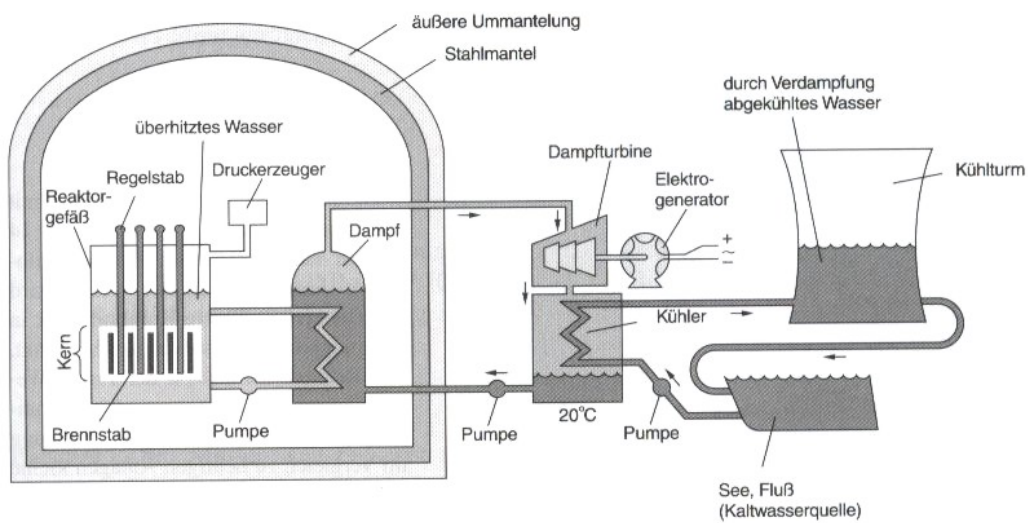
Graphische Veranschaulichung des Neutronenzyklus

Abbildung 3.33: Graphische Veranschaulichung des Neutronenzyklus. (aus Ref. [10])

tronen für die Kettenreaktion verloren gehen können, bis sie zu einer weiteren Spaltung führen. Die Verluste werden hervorgerufen durch

- Entweichen von Neutronen
- Absorption $\sigma(n, \gamma)$, insbesondere im Resonanzbereich
- Einfang in anderen Materialien (Moderator, Reaktorgifte,...) \neq Brennstoff

3. Zerfälle instabiler Kerne



Vereinfachtes Schema eines Druckwasserreaktors (PWR, *pressurized water reactor*). Das mit dem Reaktorkern in Kontakt stehende Wasser dient sowohl als Moderator als auch als Wärmeträger. Sein Kreislauf ist vollständig vom Sekundärkreislauf getrennt, in welchem Wasser erhitzt wird, um Dampfturbinen anzutreiben. Viele Details, unter anderem die Notkühlvorrichtungen, werden hier nicht gezeigt. Im Siedewasserreaktor (BWR, *boiling water reactor*) wird Dampf aus dem Primärwasserkreislauf direkt (ohne Isolationskreislauf) zu den Turbinen geleitet.

Abbildung 3.34: Schematische Darstellung eines Druckwasserreaktors. (aus Ref. [10])

Literaturverzeichnis

- [1] Th. Mayer-Kuckuck, *Kernphysik*, Teuber Verlag
- [2] J. Bleck-Neuhaus, *Elementare Teilchen - Moderne Physik von den Atomen bis zum Standardmodell*, Springer Verlag
- [3] B. Povh, K.Rith, C.Scholz und F. Zetsche, *Teilchen und Kerne*, Springer Verlag
- [4] K. Bethge, G. Walter und B. Wiedemann, *Kernphysik*, Springer Verlag
- [5] D. Griffith, *Introduction to Elementary Particles*, Verlag Wiley-VCH
- [6] F. Halzen und A.D. Martin, *Quarks & Leptons*, Verlag J. Wiley
- [7] C. Grupen, *Teilchendetektoren*, BI Wissenschaftsverlag
- [8] W.R.Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Springer Verlag
- [9] K. Kleinknecht, *Detektoren für Teilchenstrahlung*, Teuber Verlag
- [10] E. Bodenstedt, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung*, BI Wissenschaftsverlag (1978)
- [11] P. A. Tipler und R. A. Llewellyn, *Moderne Physik*, Oldenburg Verlag (2002)
- [12] W. Demtröder, *Experimentalphysik 4, Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, Springer Verlag
- [13] *Reaktorphysik*, Universität Bonn (1982)