

Experimentalphysik V - Kern- und Teilchenphysik Vorlesungsmitschrift

Dozent: Prof. K. Jakobs

Verfasser: Ralf Gugel

13. Januar 2013

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

2.1 Nomenklatur

Die Kenngrößen von Kernen, die im Periodensystem der Elemente als Symbol X zu finden sind, sind

- Protonenzahl Z
- Neutronenzahl N
- Massenzahl (Nukleonenzahl) $A = N + Z$

Ein Isotop des chemischen Elements X wird dann bezeichnet durch

$$\boxed{{}_Z^A X_N}, \quad (2.1)$$

beispielsweise ${}_{92}^{238}U_{146}$. Sowohl Protonen (p) als auch Neutronen (n) werden als Nukleonen bezeichnet, A entsprechend als Nukleonenzahl. Die Ladung des Kerns ist $Q = +Ze$, wobei $e = 1.6 \cdot 10^{-19}C$ die Elementarladung bezeichnet.

Das chemische Element und seine chemischen Eigenschaften werden durch die Ladungszahl beziehungsweise die Elektronenkonfiguration festgelegt. Atome sind elektrisch neutral, so dass gilt

$$Q(Z \cdot e) = -Q(\text{Elektronen}) \quad (2.2)$$

Zur Bestimmung der Ladungszahl des Kerns kann beispielsweise eine Vermessung der charakteristischen Röntgenstrahlung durchgeführt werden. Nach dem Mosley'schen Gesetz gilt

$$E(K_\alpha) \sim (Z - 1)^2 \quad (2.3)$$

Als Nuklide bezeichnet man verschiedene Kombinationen von Z und N . Dabei unterteilt man in

Isotone $N = const.$, das chemische Element kann sich ändern

Isotope $Z = const.$, das chemische Element bleibt unverändert (z.B. ${}_{6}^{12}C_6, {}_{6}^{13}C_7, {}_{6}^{14}C_8$)

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

Isobare $A = \text{const.}$

Alle bekannten Kerne sind in der sogenannten *Nuklidkarte* oder *Isotopentafel* erfasst.

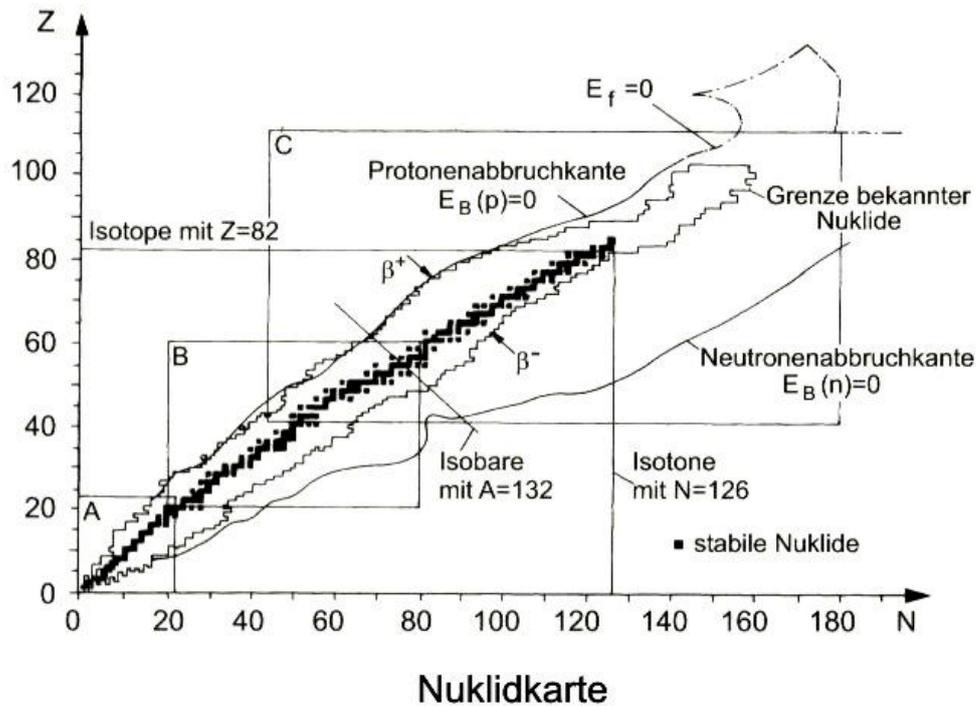


Abbildung 2.1: Nuklidkarte (aus Ref. [?])

Es gibt etwa 2700 bekannte Nuklide, d.h. 2700 Isotope der bislang bekannten 112 chemischen Elemente. Der weitaus größte Teil ist instabil und zerfällt nach kurzer Lebensdauer. Der Bereich in der (N, Z) -Ebene in der Kerne existieren können wird durch Stabilitätslinien gekennzeichnet.

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

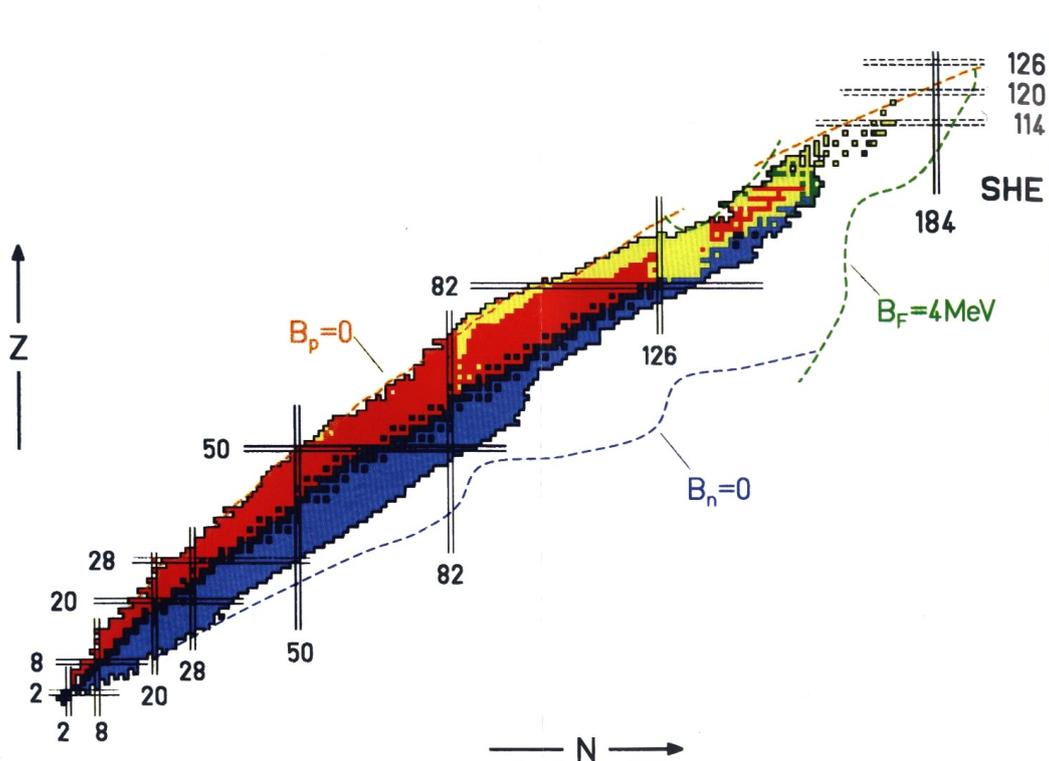


Abbildung 2.2: Nuklidkarte. Stabile Kerne sind schwarz markiert, farbige Punkte kennzeichnen instabile Kerne. (aus Ref. [?])

2.2 Ausdehnung von Atomkernen

Rutherford (1911), sowie Geiger und Marsden (1913) führten Experimente durch zur Streuung eines kollimierten α -Strahls an einer dünnen Goldfolie und untersuchten dabei die Winkelverteilung der gestreuten α -Teilchen. Die Ergebnisse des Versuches waren

- Die Intensität der gestreuten α -Teilchen nimmt mit zunehmendem Winkel ab
- Streuung auch mit kleiner Rate unter hohen Winkeln ($\theta > 90^\circ$, Rückstreuung)

klassische Rechnung

Die Kraft auf Grund der Coulomb-Abstoßung ist

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \cdot \vec{r}_0 = m \vec{a} \quad (2.4)$$

Dies stellt ein klassisches zwei-Körperproblem dar, die Streuung am Zentralkraftfeld. Die klassische Mechanik (siehe z.B. Goldstein) liefert einen Zusammenhang zwischen

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

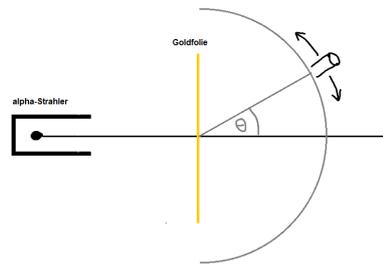


Abbildung 2.3: Aufbau des Rutherford-Experiments

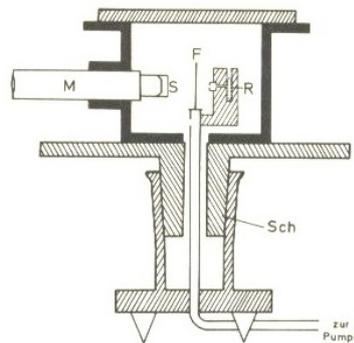


Abbildung 2.4: Anordnung von Geiger und Marsden zur Beobachtung der Rutherford-Streuung von α -Teilchen an einer Goldfolie. Das Emanationsröhrchen R befindet sich in einem Bleiklotz, der nach links austretende kollimierte α -Strahl passiert die Goldfolie F. Die α -Teilchen, die nach einer Streuung auf den Szintillator S gelangen werden durch das Mikroskop M betrachtet. (aus Ref. [10])

der kinetischen Energie E_{kin} , dem Ablenkwinkel θ und dem Stoßparameter b :

$$\cot \frac{\theta}{2} = 2 \cdot E_{\text{kin}} \cdot b \cdot \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{zZe} \right) \quad (2.5)$$

wobei $q_1 = ze$ (α) sowie $q_2 = Z \cdot e$. Es folgt hieraus sofort der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta} = \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{(4\pi\epsilon_0) \cdot 4 \cdot E_{\text{kin}}} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (\text{Rutherford'sche Streuformel, SI}) \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta} = \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{4 \cdot E_{\text{kin}}} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (\text{nat. Einheiten}^1)$$

Die Winkelabhängigkeit hängt mit dem Impulsübertrag zusammen. $\vec{p}, \vec{p}' \rightarrow \vec{q} := \vec{p} - \vec{p}'$. Da ein zeitunabhängiges Potential nur eine elastische Streuung bewirken kann, sind

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

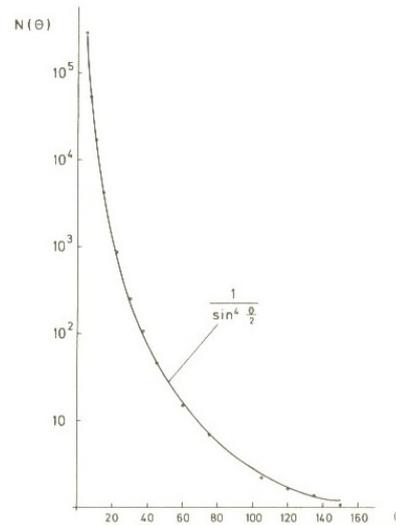


Abbildung 2.5: Graphische Darstellung der Messergebnisse von Geiger und Marsden für die Streuung von α -Teilchen an einer Goldfolie. Die ausgezogene Linie stellt den theoretischen Verlauf für reine Coulomb-Streuung im elektrischen Feld einer Punktladung dar. Der gestrichelte Verlauf wäre bei homogener Massenverteilung im Atom (Thomson-Modell) zu erwarten. (aus Ref. [10])

die kinetischen Energien vor und nach der Streuung identisch. Es ergibt sich somit, dass

$$|\vec{q}| = 2 \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.7)$$

Mit $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$ (nicht-relativistisch) ergibt sich

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta} = \left(\frac{z \cdot Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot (2m)^2 \cdot \frac{1}{q^4} \quad (2.8)$$

Der Streuquerschnitt ist also proportional zu $\left(\frac{1}{q}\right)^4$. Dieser Zusammenhang gilt auch quantenmechanisch: $\sim \left(\frac{1}{\text{Impulsübertrag}}\right)^4$.

Interpretation des Rutherford-Experiments (und weiterer Experimente):

- Das Atom enthält einen geladenen Atomkern der Größe $R < \sim 10^{-14}\text{m}$, der fast die gesamte Masse des Atoms enthält;
- Die Ladung beträgt $+Z$ Elementarladungen, wobei Z die Ordnungszahl im periodischen System der Elemente bedeutet;
- Die Atomhülle enthält die entsprechende negative Ladung, so dass das Atom insgesamt elektrisch neutral ist. Diese Ladung ist an sehr viel kleinere Partikel gebunden.

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

Quantenmechanische Herleitung der Rutherford-Formel

Siehe auch Literatur, z.B. H.Rollnik, Kapitel 2.12

Zu Berechnen ist die elastische Streuung von nicht-relativistischen Spin-0 Teilchen unter dem Einfluss eines asymptotisch freien² Coulomb-Potentials. Unter Annahme einer einlaufenden, ebenen Welle eines Teilchens mit Impuls \vec{p} und Energie E , erhält man als Lösung für große Abstände eine Superposition von (einlaufender) ebener Welle und auslaufender Kugelwelle mit Impuls \vec{p}'

$$\psi_p(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k}\vec{r}} + \underbrace{f(\vec{p}, \vec{p}') \cdot \frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{auslaufende Kugelwelle}} \quad (2.9)$$

wobei $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$. $f(\vec{p}, \vec{p}')$ wird als Streuamplitude bezeichnet. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann gegeben durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = |f(\vec{p}, \vec{p}')|^2 \quad (2.10)$$

Störungstheorie

In der Born-Näherung (nach M. Born) sind die Terme der führenden Ordnung gegeben durch

$$f^1(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3r, \quad \vec{q} := \vec{p} - \vec{p}' \quad (2.11)$$

Man führt üblicher Weise zusätzlich ein Potential

$$\tilde{V}(\vec{q}) := \int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) \cdot d^3r \quad (2.12)$$

ein, d.h. die Fourier-Transformierte des Potentials bzgl. des Impulsübertrags. Somit erhalten wir

$$f^1(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \cdot \tilde{V}(\vec{q}) \quad (2.13)$$

Angewand auf das Coulomb-Potential

$$V(\vec{r}) = -\frac{zZe^2}{r} \quad (2.14)$$

erhält man, mit der Poisson-Gleichung für punktförmige Ladungsverteilung

$$\Delta V(r) = 4\pi \cdot Z \cdot Z \cdot e^2 \cdot \delta^3(\vec{r}), \quad (2.15)$$

dass

$$f^1(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \cdot \tilde{V}(q) = \frac{2m \cdot zZe^2}{q^2} \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^1(\vec{p}, \vec{p}')|^2 = (zZe^2)^2 \cdot (2m)^2 \cdot \frac{1}{q^4}$$

²d.h. $\lim_{r \rightarrow \infty} V(\vec{r}) = 0$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

Es ergibt sich ein Ergebnis, das identisch zur klassischen Rechnung ist, die Plank'sche Konstante \hbar fällt heraus.

Die Ergebnisse des Rutherford-Experiments zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen Daten und den Rechnungen mit einem punktförmigen Coulomb-Potential, die Theorie ist in erster Näherung in Ordnung, d.h. die α -Teilchen bewegen sich in einem „ungestörten“ Coulomb-Feld und spüren noch nichts von einer stärkeren Kernkraft, die offensichtlich die Protonen und Neutronen gegen die Coulomb-Abstoßung zusammen halten muss.

Abschätzung der Größe des Atoms durch die dichteste Annäherung (klassisch):

$$b = 0, \theta = 180^\circ, \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{zZe^2}{r_{\min}} \quad (2.17)$$

mit $z = 2$, $Z = 79$ (Gold) und $E_{\text{kin}} = 5.5\text{MeV}$ folgt

$$\rightarrow r_{\min} = 4.1 \cdot 10^{-14}\text{m} \quad (2.18)$$

Aus der Beobachtung der reinen Coulomb-Streuung ergibt sich, dass der Radius des Goldkerns kleiner als $4.1 \cdot 10^{-14}\text{m}$ ist.

DeBroglie-Wellenlänge von Teilchen

$$\lambda := \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{pc} \approx \frac{200\text{MeV} \cdot \text{fm}}{p \cdot c} \quad (2.19)$$

- (i) Für α -Teilchen mit kinetischer Energie $E_{\text{kin}} = 5\text{MeV}$ wie im Rutherford-Experiment gilt in relativistischer Rechnung

$$\begin{aligned} E^2 &= (p \cdot c)^2 + (mc^2)^2 = (E_{\text{kin}} + mc^2)^2 = E_{\text{kin}}^2 + (mc^2)^2 + 2E_{\text{kin}}mc^2 \\ \Rightarrow p \cdot c &= \sqrt{E_{\text{kin}}(E_{\text{kin}} + 2mc^2)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Für eine kinetische Energie von 5MeV und $m_\alpha \approx 4 \cdot m_p \approx 3750\text{MeV}/c^2$ ist der Impuls komplett durch den Massenterm bestimmt:

$$\Rightarrow \lambda \approx \frac{200\text{MeV} \cdot \text{fm}}{\sqrt{5(5 + 7500)\text{MeV}}} \approx 1\text{fm} \quad (2.21)$$

- (ii) Elektronen: Für Elektronen ist im Allgemeinen der Massenterm vernachlässigbar. Es ergibt sich somit für Elektronen der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = 100\text{MeV}$:

$$\lambda \approx \frac{200\text{MeV} \cdot \text{fm}}{\sqrt{100(100 + 2 \cdot 0.511)\text{MeV}}} \approx 2\text{fm} \quad (2.22)$$

für $E_{\text{kin}} = 500\text{MeV}$ bzw. $E_{\text{kin}} = 1\text{GeV}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_{500\text{MeV}} &\approx 0.4\text{fm} \\ \lambda_{1\text{GeV}} &\approx 0.2\text{fm} \end{aligned} \quad (2.23)$$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

2.2.1 Streuung von α -Teilchen höherer Energie

Nach Beginn der Beschleunigerentwicklung in den 1950er Jahren konnte die α -Energie kontrolliert erhöht werden und es wurde 1955 die Streuung von 40 MeV α -Teilchen an einer Gold-Folie untersucht.

Ergebnis: Für große Winkel ab $\theta \gtrsim 40^\circ$ wird eine starke Abweichung von der Rutherford-Formel festgestellt, d.h. eine Abweichung von reinen Coulomb-Potential \rightarrow Einfluss der Kernkräfte (starke Wechselwirkung)

Bei der Streuung von hochenergetischen α -Teilchen kann eine Abweichung von der Coulomb-Streuung festgestellt werden und somit ein Radius von $\sim 13 \cdot 10^{-15} \text{m}$ (Au) $\approx 13 \text{fm}$ festgestellt werden³.

Grenzen der Anwendbarkeit der Rutherford-Streuformel:

- Vernachlässigung der starken Kernkraft
- Die Ladungsverteilung im Kern wird als punktförmig angenommen, $\rho(\vec{r})$ über Kernvolumen
- Gilt nur für Spin-0 Teilchen, Spin-Effekte führen zu Korrekturen. Für α -Teilchen ist die Annahme von Spin-0 Teilchen richtig, für e^- gilt jedoch beispielsweise die sog. *Mott-Streuung* für die Streuung am spinlosen Target:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = (2 \cdot z \cdot Z \cdot e^2)^2 \frac{E^2}{(qc)^4} \left\{ 1 - \underbrace{\left(\frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}_{\text{Beiträge durch Spin-Effekte}} \right\} \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.25)$$

wobei E die relativistische Gesamtenergie $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ und v die Geschwindigkeit des Elektrons sind. es ist hier also eine relativistische Rechnung erforderlich und der Mott-Querschnitt fällt für große Winkel noch stärker ab, als der Rutherford-Streuquerschnitt.

2.2.2 Streuexperimente mit Elektronen

Experimente mit Elektronen sind motiviert durch:

- α -Teilchen unterliegen der starken Kernkraft, d.h. es ist unmöglich mit α -Teilchen Informationen über die Verteilung der elektrischen Ladung im Kern zu erhalten.

³Streng genommen handelt es sich hierbei um $R_{\text{Au}} + R_{\alpha} + R_{\text{Kernkraft}}$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

- Elektronen sind nicht sensitiv auf die Kernkraft (starke Wechselwirkung), nur elektromagnetisch und schwach wechselwirkend, d.h. es kann die Verteilung der elektrischen Ladung im Kern untersucht werden:
 - Ist der Kern punktförmig?
 - ist die Ladung (annähernd) homogen über ein größeres Volumen, z.B. eine Kugel mit Radius R_0 ?
- $R(\text{el. Ladung}) \approx R(\text{starke WW}, \alpha)$, d.h. fällt der Ladungsradius mit dem Radius der starken Kernkraft zusammen?
- Elektronen sind punktförmig ($r_e < 10^{-18}\text{m}$)
- Die Wellenlänge der Elektronen kann durch ihre Energie (Beschleuniger) festgelegt werden

Experimente in den 1950er Jahren:

R. Hofstädter, Stanford University Californien am SLAC (Stanford Linear Accelerator Centre) führte Experimente durch mit Elektronen, deren Wellenlänge

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar c}{pc} = \frac{200\text{MeV} \cdot \text{fm}}{pc} \quad (2.26)$$

bei einer Energie von $E(e^-) = 100\text{MeV}$ $\lambda_e = 2\text{fm}$ und bei $E = 1\text{GeV}$ rund $\lambda_e = 0.02\text{fm}$ beträgt.

Elektronenstreuung an Kernen:

Für einen Kern der Ladung $+Ze$ und Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$, $\int \rho(\vec{r}) \cdot d^3r = 1$ ist

$$Z \cdot e = \int Z \cdot e \cdot \rho(\vec{r}) d^3r \quad (2.27)$$

Die Quantenmechanische Streuamplitude erhält man nun durch

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\vec{q}) &= -\frac{4\pi Z \cdot e^2 \cdot \hbar^2}{q^2} \cdot \int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}) \cdot d^3r \\ &= -\frac{4\pi Z e^2 \hbar^2}{q^2} \cdot F(\vec{q}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Größe

$$F(\vec{q}) := \int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}} \cdot \rho(\vec{r}) \cdot d^3r \quad (2.29)$$

wird dabei als *Formfaktor* bezeichnet. Für die Streuamplitude ergibt sich

$$f(\vec{p}, \vec{p}') = f(\vec{q}) = -\frac{2m \cdot Z \cdot e^2}{q^2} \cdot F(\vec{q}) \quad (2.30)$$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

so dass für den Wirkungsquerschnitt folgt:

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{4m^2 \cdot Z^2 \cdot e^4}{q^4} \cdot |F(\vec{q})|^2 \quad (2.31)$$

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\delta(r)} \cdot |F(\vec{q})|^2}$$

wobei $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\delta(r)}$ der differentielle Streuquerschnitt eines Punktteilchens ist (Delta-Distribution).

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung ergibt sich als Produkt aus dem Wirkungsquerschnitt der Streuung an einer Punktladung und dem Quadrat des Formfaktors. Der Formfaktor ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung. Aus dem theoretischen Wirkungsquerschnitt für eine Punktladung und dem experimentell bestimmten Wirkungsquerschnitt erhält man

$$|F(q)|^2 = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp}}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Punkt}}} \quad (2.32)$$

und somit die Ladungsverteilung als (invers) Fouriertransformierte des Formfaktors:

$$\rho(r) = \text{FT}^{-1} (F(q)) \quad (2.33)$$

Für punktförmige Ladungsverteilungen wird $F = 1$. F beschreibt die Abweichung von der Punktförmigkeit. Allgemein gilt

$$|F(\vec{q})| \leq \int |\rho(r)| \cdot d^3r = \int \rho(r) d^3r = 1 \quad (2.34)$$

\Rightarrow der Wirkungsquerschnitt der Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung ist stets kleiner als 1.

Einige Beispiele für $\rho(r) \leftrightarrow |F(q)|$ sind in Abb. 2.8 und 2.9 dargestellt. Die Oszillationen entstehen durch die Überlagerung von Streuwellen, die von Streuzentren an verschiedenen Volumenelementen entstehen.

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

Experimente zur natürlichen Radioaktivität

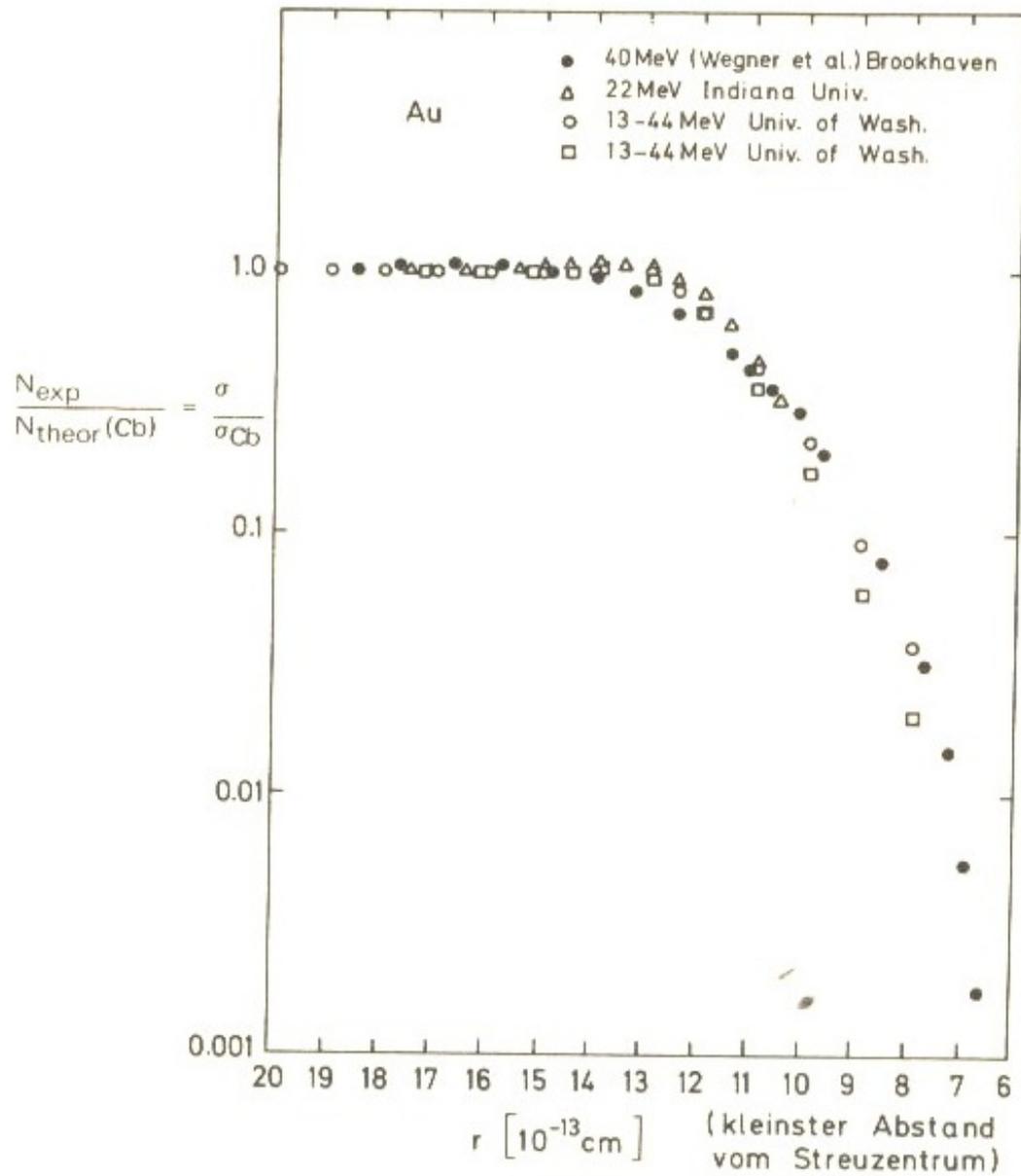


Abbildung 2.6: Verhältnis des gemessenen Wirkungsquerschnitts zum Coulombquerschnitt, dargestellt als Funktion des kleinsten Abstands der klassisch berechneten Bahn der α -Teilchen vom Streuzentrum (aus Ref. [10])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

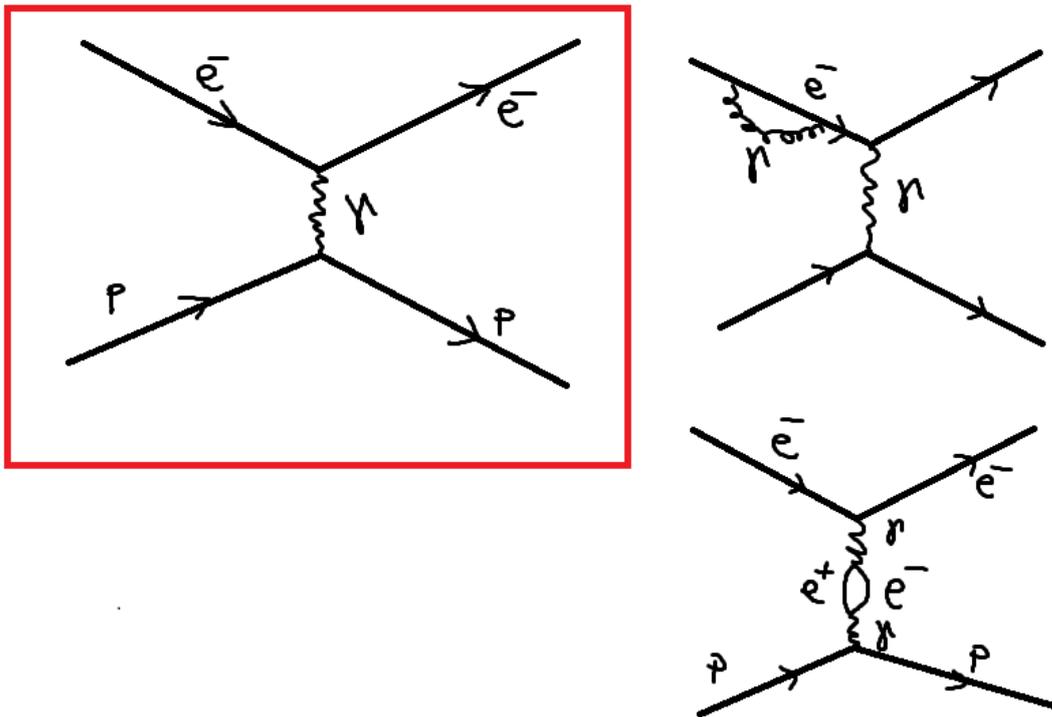


Abbildung 2.7: Mögliche Wechselwirkungen beim Stoß von Elektron und Proton. Der Hauptteil der Wechselwirkung findet wie im rot markierten Diagramm dargestellt statt. Die weiteren Diagramme stellen beispielhaft weitere mögliche Wechselwirkungsarten dar.

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

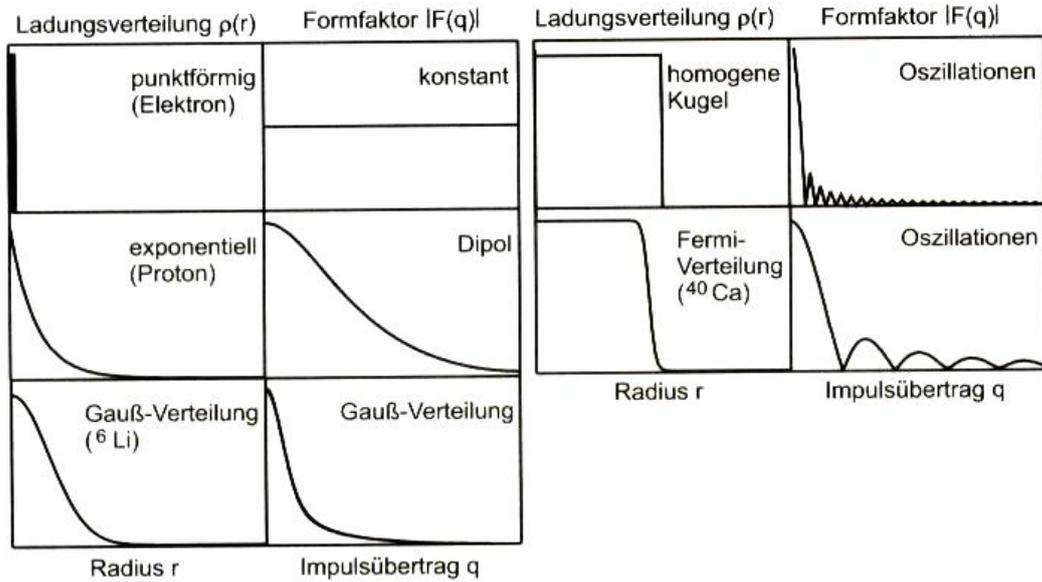


Abbildung 2.8: Einige Beispiele für Ladungsverteilungen und zugehörige Formfaktoren (aus Ref. [11])

Ladungsverteilung $f(r)$	Formfaktor $F(q)$
Punkt $\frac{1}{4\pi} \delta(r)$	1 konstant
exponentiell $\left(\frac{a^3}{8\pi}\right) e^{-ar}$	$\left(\frac{1+q^2}{a^2\hbar^2}\right)^{-2}$ Dipol
Gauß $\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-a^2 r^2/2}$	$\exp\left(-\frac{q^2}{2a^2\hbar^2}\right)$ Gauß
homogene Kugel $\begin{cases} C \text{ für } r \leq R \\ 0 \text{ für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ mit $\alpha = q R/\hbar$ oszillierend

Abbildung 2.9: Einige Beispiele für Ladungsverteilungen und zugehörige Formfaktoren (aus Ref. [11])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

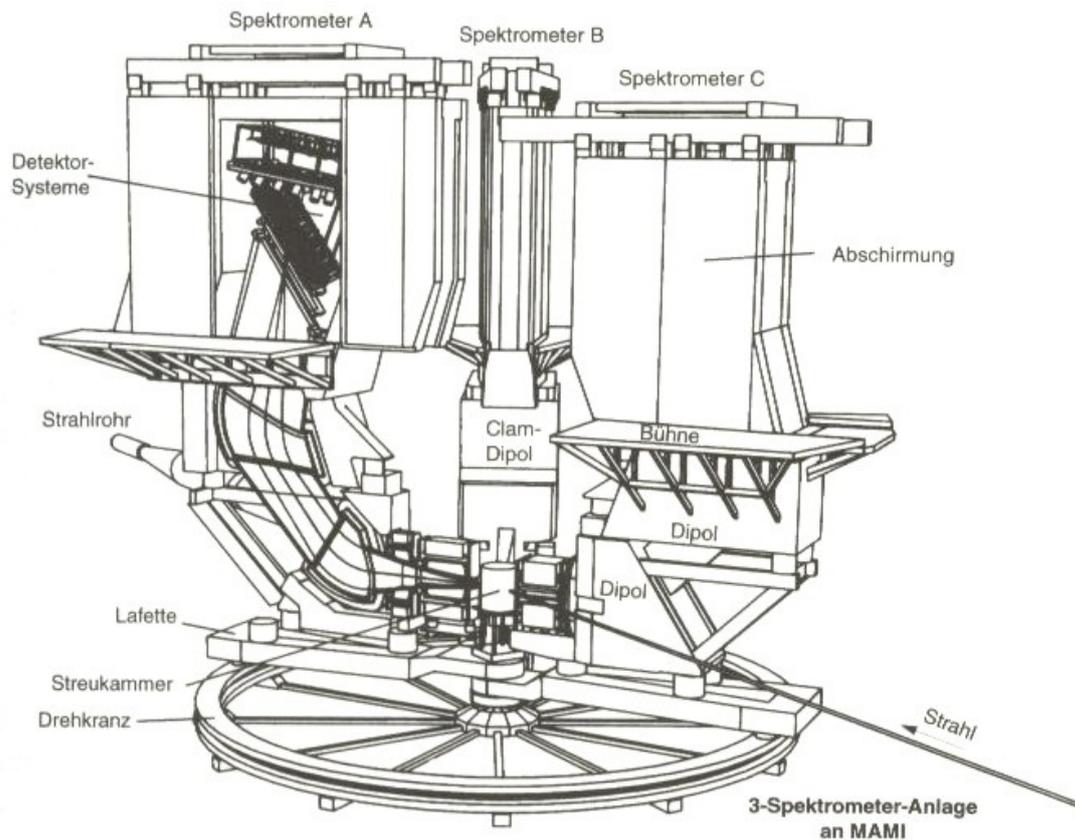


Abbildung 2.10: „Experimenteller Aufbau zur Messung der Elektronenstreuung an Protonen und Kernen am Elektronenbeschleuniger MAMI-B (Mainzer Mikrotron). Die höchste erreichbare Elektronenenergie beträgt 820MeV. In diesem Bild sind drei Magnet-spektrometer gezeigt, die separat zum Nachweis elastischer Streuung und in Ko-inzidenz zum detaillierten Studium der inelastischen Kanäle dienen. Das Spektrom-eter A ist aufgeschnitten gezeigt. Die gestreuten Elektronen werden durch zwei Dipolmagnete und mit Hilfe eines aus Drahtkammern und Szintillationszählern be-stehenden Detektorsystems impulsanalysiert. Zum Großenmaßstab: der Durchmes-ser des Drehkranzes beträgt ca. 12m.“(aus Ref. [4]).

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

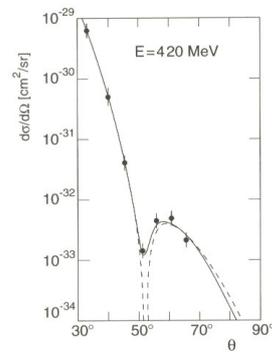
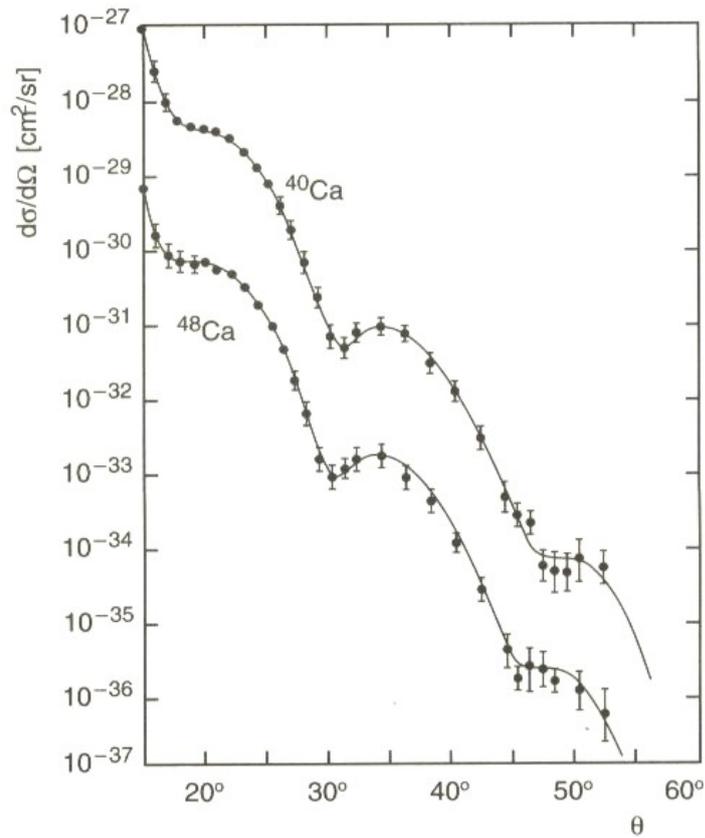


Abbildung 2.11: Messung des Formfaktors von ^{12}C durch Elektronenstreuung. Gezeigt ist der differentielle Wirkungsquerschnitt, der bei einer festen Strahlenergie von 420 MeV unter 7 verschiedenen Streuwinkeln gemessen wurde. Die gestrichelte Kurve entspricht dem Verlauf, der sich ergibt, wenn eine ebene Welle an einer homogenen Kugel mit diffusem Rand gestreut wird (Born'sche Näherung); die durchgezogene Kurve entspricht einer exakten Streuphasenanalyse, die an die Messdaten angepasst wurde. (aus Ref. [11])

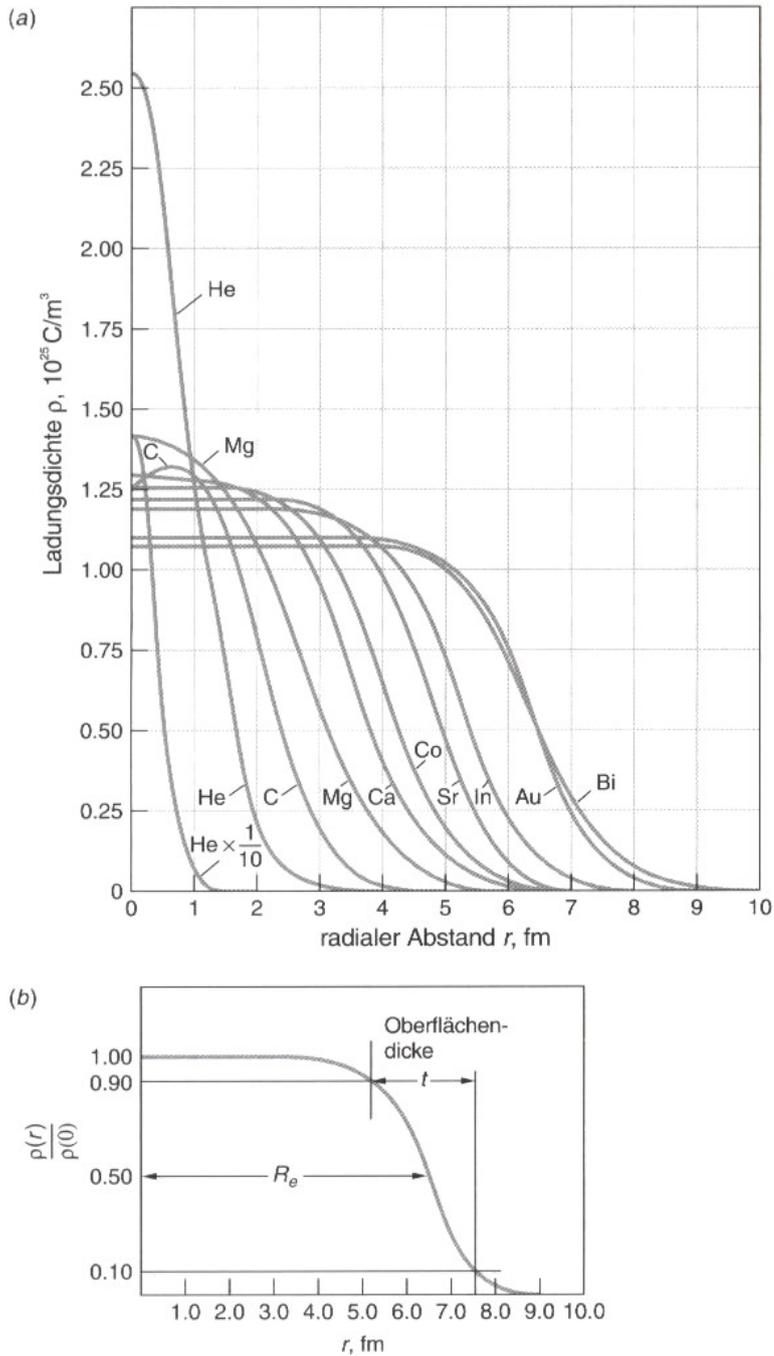
2. Eigenschaften stabiler Atomkerne



Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Elektronen an den Kalziumisotopen ^{40}Ca und ^{48}Ca [Be67]. Zur besseren Darstellung wurde der Wirkungsquerschnitt für ^{40}Ca und ^{48}Ca mit 10 bzw. 10^{-1} multipliziert. Die durchgezogenen Linien entsprechen Ladungsverteilungen, die man an die Daten angepasst hat. Aus der Lage der Minima kann man sehen, dass der Radius von ^{48}Ca größer ist als der von ^{40}Ca .

Abbildung 2.12: (aus Ref. [11])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne



(a) Ladungsverteilung verschiedener Kerne aus Streuexperimenten mit schnellen Elektronen.
 (b) Definitionen der Parameter R und t , die zur Beschreibung der Kernladungsdichte verwendet werden. Die Oberflächendicke t wird zwischen 10 und 90 Prozent der Ladungsdichte in der Mitte des Kerns gemessen. (Aus R. Hofstadter, *Annual Review of Nuclear Science* 7, 231 (1957).)

Abbildung 2.13: (aus Ref. [11])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

2.2.3 Kernradien

- Rutherfordstreuung-ähnliche Streuexperimente zeigen, dass der Kernradius R definiert durch Abweichungen von einer punktförmigen Coulomb-Streuung (Einsetzen der Kernkraft), mit der Nukleonenzahl erwächst wie:

$$R = r_0 \cdot A^{1/3}, \quad r_0 = (1.3 \pm 0.1)\text{fm} \quad (2.35)$$

Für ein Goldatom ($A = 197$) ergibt sich $R \approx (7.6 \pm 0.6)\text{fm}$. Zu beachten ist hierbei jedoch, dass eine genaue Definition für die sinnvolle Angabe eines Kernradius nötig ist.

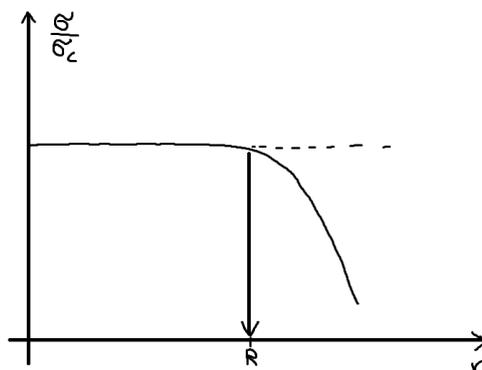


Abbildung 2.14: zur Berechnung des Kernradius aus der Streuung von α -Teilchen

- Elektron-Streuung: (Ladungsverteilung, elektromagnetische Wechselwirkung) Wie bereits beschrieben kann der Formfaktor aus den Wirkungsquerschnitten bestimmt werden. Die gemessenen Winkelverteilungen lassen sich häufig durch die Annahme einer Fermi-Verteilung (für schwere Kerne, $A \gtrsim 20$) für $\rho(r)$ beschreiben:

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R_{1/2}}{d}}}, \quad \rho(R_{1/2}) = \frac{1}{2}\rho_0 \quad (2.36)$$

Dabei ist d ein Maß für die Randdicke t .

Experimentell ergibt sich (konsistent mit dem Radius der starken Wechselwirkung)

$$R_{1/2} = 1.07A^{1/3}\text{fm} \quad (2.37)$$

Weiter kann die Randdicke definiert werden als

$$\begin{aligned} t &:= R_{0.1} - R_{0.9} \\ \rho(R_{0.1}) &= 0.1\rho_0 \\ \rho(R_{0.9}) &= 0.9 \cdot \rho_0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

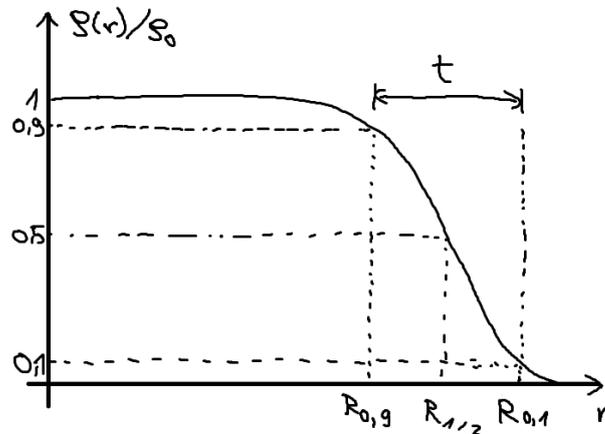


Abbildung 2.15: Ladungsverteilung angenommen als Fermi-Verteilung mit $R_{1/2}$

Für Calcium ist beispielsweise

$$\begin{aligned} t &= 4.4 \cdot d \\ t &= 2.4 \text{ fm} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Weiter ergibt sich für Kerne mit $A > 20$ die Ladungsdichte im Inneren, da $Z/A \approx \text{const.}$ für die weiteren stabilen Kerne:

$$\rho_0 = 0.17 \cdot \frac{Ze}{A} \cdot \text{fm}^{-3} \quad (2.40)$$

d.h. jedes Nukleon (p und n) nimmt ein Volumen von etwa 6 fm^3 ein.

- Die Kugelgestalt gilt für Kerne mit $A \sim 20 - 60$
- stärkere Abweichungen bei Lanthanoiden, seltene Erden \rightarrow elliptisch deformiert
- Leichtere Kerne ${}^4\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ sind Sonderfälle und weisen Gaußförmige Ladungsverteilungen auf.

Mittlerer quadratischer Ladungsradius

Den mittleren quadratischen Radius kann aus der Steigung des gemessenen Formfaktors bei kleinen q^2 bestimmt werden, sofern die Ladungsverteilung nur von r

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

abhängt. Die Normierungsbedingung der Ladungsdichte liefert:

$$\begin{aligned} 1 &= \int \rho(r) \cdot d^3r \\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r) \cdot r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \cdot r^2 \cdot dr \end{aligned} \quad (2.41)$$

Für den mittleren quadratischen Radius gilt dann per Definition:

$$\langle r^2 \rangle := 4\pi \cdot \int_0^\infty r^2 \cdot \rho(r) \cdot r^2 \cdot dr \quad (2.42)$$

Eine Taylor-Entwicklung von $F(q^2)$ für kleine q^2 liefert:

$$\begin{aligned} F(q^2) &= 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{q \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots \\ &= 1 + q^2 \cdot \frac{dF(q^2)}{dq^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.43)$$

und somit

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \cdot \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} \quad (2.44)$$

Für mittlere und schwere Kerne findet man wieder eine $A^{1/3}$ Abhängigkeit:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0 \cdot A^{1/3} \quad \text{mit } r_0 = 0.94\text{fm} \quad (2.45)$$

Auch hier ergibt sich ein r_0 -Wert, der konsistent ist mit den oben angegebenen Werten.

Die $A^{1/3}$ -Abhängigkeit ist auch hier bestätigt, wie zu erwarten war ist für „kugelförmige“ Kerne

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V \sim A \Rightarrow r \sim A^{1/3} \quad (2.46)$$

2.3 Masse der Atomkerne

Zur Bestimmung von Kernmassen werden Massenspektrographen bzw. Massenspektrometer verwendet. Die ersten derartigen Geräte wurden entwickelt in den Jahren

1912 durch J.J. Thomson, sowie

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

1919 durch F. Aston.

Gemessen wird dabei $\frac{Q}{m}$ aus der Ablenkung von Ionen in kombinierten elektrischen und magnetischen Feldern⁴

- (i) Impuls $p = mv \Rightarrow$ wird über das magnetisches Feld / die Lorentzkraft bestimmt
- (ii) Energie: $E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$ Wird über das elektrische Feld bestimmt

Man erhält hieraus die Masse durch

$$m = \frac{p^2}{2E} \quad (2.47)$$

Im elektrischen Feld (Kondensator) gilt

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{\text{el}}| &= |Q \cdot \vec{E}| = \frac{mv^2}{\rho_E}, \quad \text{für } \vec{v} \perp \vec{E} \\ \Rightarrow 2E &= Q|\vec{E}| \cdot \rho_E \end{aligned} \quad (2.48)$$

wobei eine kleine Krümmung der Bahn mit Radius ρ_0 angenommen wird. Im magnetischen Feld gilt auf Grund der Lorentzkraft:

$$|\vec{F}_L| = |Q\vec{v} \times \vec{B}| = \underset{\vec{v} \perp \vec{B}}{=} Q \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| = \frac{mv^2}{\rho_M} \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow p = m \cdot v = Q \cdot |\vec{B}| \cdot \rho_M \quad (2.50)$$

Womit die Masse gegeben ist durch

$$\boxed{m = \frac{p^2}{2E} = Q \cdot \frac{B^2 \rho_M^2}{E \rho_E}} \quad (2.51)$$

Man unterscheidet zwei Arten von Messapparaturen:

Massenspektrograph fest eingestellte Feldstärken \rightarrow Registrierung aller Massen eines bestimmten Bereichs gleichzeitig auf einer Nachweisfläche (z.B. Photoplatte, Detektor)

Massenspektrometer Ortsfester Detektor, Massen werden durch Variation der Felder selektiert.

Bei der Konstruktion von Massenspektrographen ist darauf zu achten, dass neben einer hohen Massenauflösung auch eine hohe Transmission erreicht wird. Die Massenauflösung ist teilweise begrenzt durch die Richtungsstreuung von \vec{v}_{in} , d.h. dem Beitrag

⁴Prinzipiell genügt ein reines Magnetfeld oder ein reines elektrisches Feld, jedoch ist es dann nötig, die Geschwindigkeit der Ionen zu kennen

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

lenstoffisotops ${}^{12}_6\text{C}_6$ (inklusive Elektronenhülle):

$$1u := \frac{1}{12}M({}^{12}_6\text{C}) = 1.66054 \cdot 10^{-24}\text{g} = 931.494\text{MeV}/c^2 \quad (2.52)$$

bzw. mit der Avogadro/Loschmidt Zahl N_a und der Molmasse M_m (12g für ${}^{12}_6\text{C}$)

$$1u = \frac{1}{N_a} \cdot \frac{1}{12}M_m({}^{12}_6\text{C}) = \frac{1}{N_a} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{12\text{g}}{\text{mol}} = \frac{1\text{g}}{6.0221367 \cdot 10^{23}} = 1.66054 \cdot 10^{-24}\text{g} \quad (2.53)$$

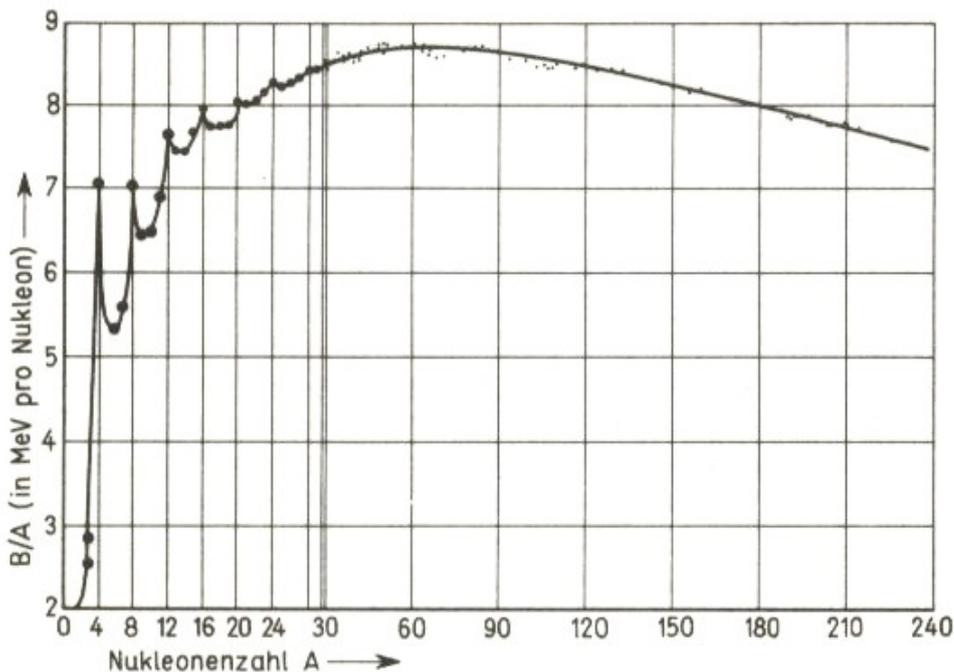
Die fehlende Masse, welche sich als Massendefekt bemerkbar macht ist äquivalent zu einer Energie

$$\Delta E = c^2 \cdot \Delta m \quad (2.54)$$

welche als Bindungsenergie E_B interpretiert wird. Für ${}^{12}_6\text{C}$ beträgt dieser Massendefekt

$$\Delta m = 6m_p + 6m_n - 12u = 92.166\text{MeV}/c^2 \quad (2.55)$$

Die Bindungsenergie $E_B(Z, N) = E_B(Z, A)$ lässt sich allgemein schreiben als



Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion von A für stabile Kerne; nach [Eva 55]. Abszisse bis A = 30 gespreizt

Abbildung 2.17: (aus Ref. [1])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

Bindungsenergie pro Nukleon für die leichtesten Kerne.

Kern	${}^2_1\text{H}_1$ (d)	${}^3_1\text{H}_2$ (t)	${}^3_2\text{He}_1$	${}^4_2\text{He}_2$ (α)	${}^6_3\text{Li}_3$	${}^7_3\text{Li}_4$	${}^8_4\text{Be}_4$ ($\rightarrow 2\alpha$)	${}^9_4\text{Be}_5$	${}^{10}_5\text{B}_5$	${}^{11}_5\text{B}_6$	${}^{12}_6\text{C}_6$
B	2,225	8,482	7,718	28,29	31,99	39,24	56,49	58,16	64,75	76,20	92,16
B/A	1,11	2,83	2,57	7,07	5,33	5,60	7,06	6,46	6,47	6,93	7,67
S_n	2,22	6,25	—	20,6	5,66	7,25	18,9	1,67	8,44	11,4	18,7
S_p	2,22	—	5,49	19,8	4,65	9,98	17,2	16,9	6,59	11,2	15,9
δ_n	—	4,0	—	—	—	1,6	—	—	—	3	—
δ_p	—	—	3,3	—	—	—	7,22	14,9	—	—	4,7

Alle Energien in MeV; B, S_n und S_p nach [Eve 61]

Abbildung 2.18: Bindungsenergien B , Bindungsenergien pro Nukleon B/A sowie Separationsenergien für Neutronen S_n und Protonen S_p . (aus Ref. [1])

$$\begin{aligned}
 E_B(Z, N) &= [Z \cdot m_p + N \cdot m_n + Z \cdot m_e - m(Z, N)] \cdot c^2 \\
 &= [Z \cdot m_H + N \cdot n_m - m(Z, N)] \cdot c^2
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

wobei m_H die Masse des Wasserstoff-Atoms mit Elektron ist (keine Kernbindung).

- Zur Charakterisierung der Bindungsstärke von Kernen wird häufig die Bindungsenergie pro Nukleon betrachtet:

$$\left(\frac{\Delta m}{A} \right)_{{}^{12}_6\text{C}} = 7.68 \text{ MeV}/c^2 \tag{2.57}$$

- Die Bindungsenergie E_B wird frei, wenn Nukleonen zu Kernen vereinigt werden
- E_B muss aufgebracht werden, um den Kern in einzelne Nukleonen zu zerlegen.

Experimentelle Messungen der Massendefekte liefern für $\frac{E_B(A)}{A}$, dass

- Für $A \gtrsim 30$: $E_B \sim A$
- Für kleine A treten große Schwankungen auf:
 - (i) α -Teilchen: $\frac{E_B}{A} = 7.07 \text{ MeV}/c^2$
 - (ii) Deuterium: $\frac{E_B}{A} = 1.01 \text{ MeV}/c^2$
- E_B scheint besonders groß für Kerne mit gepaarten Nukleonen (p und n) zu sein, d.h. für jeweils gleicher, gerader Protonen- und Neutronenzahl:

$${}^4_2\text{He}_2, {}^8_4\text{Be}_4, {}^{12}_6\text{C}_6, {}^{16}_8\text{O}_8, {}^{20}_{10}\text{Ne}_{10} \tag{2.58}$$

- Das Maximum für $\frac{E_B}{A}$ wird für $A \sim 60$ (Eisen) erreicht

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

- Der Kurvenverlauf hat *enorme* Bedeutung für die Energiegewinnung aus Kernumwandlungen. Energiegewinnung ist möglich durch
 - die Fusion leichter Kerne (Energiegewinnung in Sternen, prinzipiell: $4\ ^1_1\text{H} \rightarrow\ ^4_2\text{He}_2$)
 - die Spaltung schwerer Kerne ($A \gtrsim 230$) \rightarrow Zwei näherungsweise gleich schwere Bruchstücke, allerdings statistischer Prozess, $\Delta E \approx 200\text{MeV}$, $\frac{\Delta B}{A} \sim 1\text{MeV}$

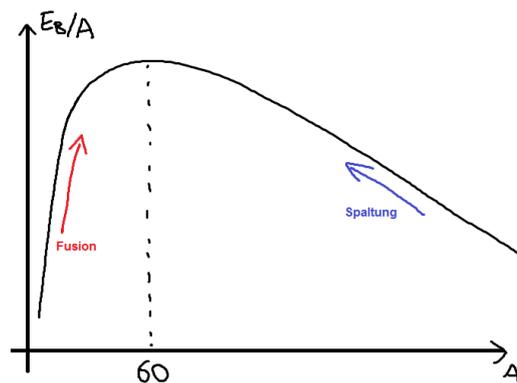


Abbildung 2.19: Energiegewinnung ist prinzipiell möglich durch Spaltung schwerer Kerne und durch Fusion leichter Kerne. Schwere Elemente nur mit Energieaufwand produziert werden können, sind diese nicht direkt in Sternen entstanden, sondern in Supernova-Explosionen, in denen ausreichend hohe Energien auftreten.

- Wichtige Konsequenzen für die Kernkraft:
Kernkräfte sind Zweikörperkräfte, die Wechselwirkung findet mit dem nächsten Nachbarn statt (vgl. Tröpfchenmodell, Kap. 2.4) Die impliziert eine kurze Reichweite auf der Skala von fm, der Nukleongröße.

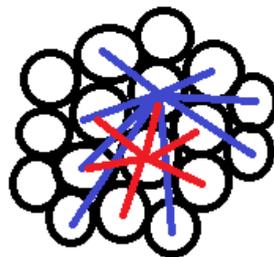


Abbildung 2.20: Wäre die für die Bindung der Nukleonen zu Kernen verantwortliche Wechselwirkung langreichweitig (blau), so müsste die Bindungsenergie $\sim A^2$ verlaufen. Eine kurzreichweitige Wechselwirkung (rot) führt zu einem Verlauf $\sim A$, wie experimentell beobachtet.

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

- Separationsenergien, d.h. die Energie, die man hinzufügen muss um ein Nukleon abzulösen ist stark (Z, N) -abhängig. Beispiele:

$$\begin{aligned}
 E_s(n) &= \begin{cases} 7.367 \text{ MeV} & \text{für } ^{208}\text{Pb} \\ 3.937 & \text{für } ^{209}\text{Pb} \end{cases} \\
 E_s(p) &= \begin{cases} 8.007 \text{ MeV} & \text{für } ^{208}\text{Pb} \\ 3.799 & \text{für } ^{209}\text{Bi} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

⇒ Analogie zur Ionisationsenergie im Atomen

→ Lässt dies auf eine *Schalenstruktur* im Kern schließen?

2.4 Tröpfchenmodell des Kerns

Die Reichweite der Kernkraft liegt in der Größenordnung $\mathcal{O}(10^{-15}\text{m})$, das Volumen der Atomkerne skaliert annähernd mit der Anzahl der Nukleonen und die Bindungsenergie pro Nukleon ist annähernd konstant (für größere Kerne). Würde die Kernkraft nicht nur auf den nächsten Nachbarn wirken, so müsste sie skalieren wie $A(A-1)$, d.h. quadratisch mit der Zahl der Nukleonen steigen. Lässt man nur Bindungen zu den nächsten Nachbarn zu, so ist $E_B \sim A$.

In einem Flüssigkeitstropfen ist die Verdampfungswärme, um ein Moldekül aus dem Tropfen zu entfernen ebenfalls unabhängig von der Größe des Tropfens und die Van-der-Waals Kraft greift ebenfalls nur an jeweils nächsten Nachbarn an.

C.F. von Weizsäcker und A. Bethe stellten ein erstes parametrisches Modell (keine Theorie!) der Atomkerne auf in Analogie zu einem Flüssigkeitstropfen:

- (i) Volumenterm: Die Kernbindungsenergie wird proportional zum Volumen V des Kerns angenommen:

$$E_{B,V} \sim A \Rightarrow E_{B,V} = a_V \cdot A, \quad 0 < a_V \hat{=} \text{Parameter} \tag{2.60}$$

- (ii) Oberflächenterm: Nukleonen an der Oberfläche sind schwächer gebunden: Aus der Oberfläche $F = 4\pi R^2$ und $R = r_0 A^{1/3}$ ergibt sich

$$E_{B,O} = -a_O A^{2/3} \tag{2.61}$$

wobei auch a_O wieder ein Parameter des Modells ist, der Experimentell zu bestimmen ist.

- (iii) Coulomb-Term: Die Protonen-Abstoßung verringert die Bindungsenergie E_B :

$$E_{B,C} = -a'_C \cdot \frac{Z^2}{R} = -a_C \cdot \frac{Z}{A^{1/3}} \tag{2.62}$$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

Ab $A \gtrsim 60$ überwiegt der Coulomb-Term gegenüber dem Oberflächenterm und führt zu einem Abfall der Bindungsenergie.

Für die potentielle Energie einer homogen geladenen Kugel mit $Q = Ze$ gilt

$$E_C = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} = \frac{3}{5} \cdot \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0}}_{a_C} \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (2.63)$$

$$r_0 = 1.2\text{fm} \Rightarrow a_C = 0.71\text{MeV}$$

Im Tröpfchenmodell wird a_C aus einem Fit an die Messdaten bestimmt.

(iv) Asymmetrie-Term:

Bei großen Nukleonenzahlen A findet man bei stabilen Kernen einen Neutronenüberschuss $N > Z$, z.B. $N - Z(^{208}\text{Pb}) = 44$. Diese Asymmetrie ist im Rahmen des Tröpfchenmodells nicht erklärbar \rightarrow Es wird eine Korrektur, motiviert durch die Quatenmechanik, eingeführt: Es wird ein Fermi-Gas-Modell der Protonen und Neutronen im Kern verwendet, bei dem die Protonen und Neutronen im Potentialtopf von der Größe des Kerns gefangen sind. Auf Grund der halbzahligen Spins gilt für Protonen und Neutronen das Pauli-Verbot. Die Wechselwirkung untereinander wird in erster Näherung vernachlässigt.

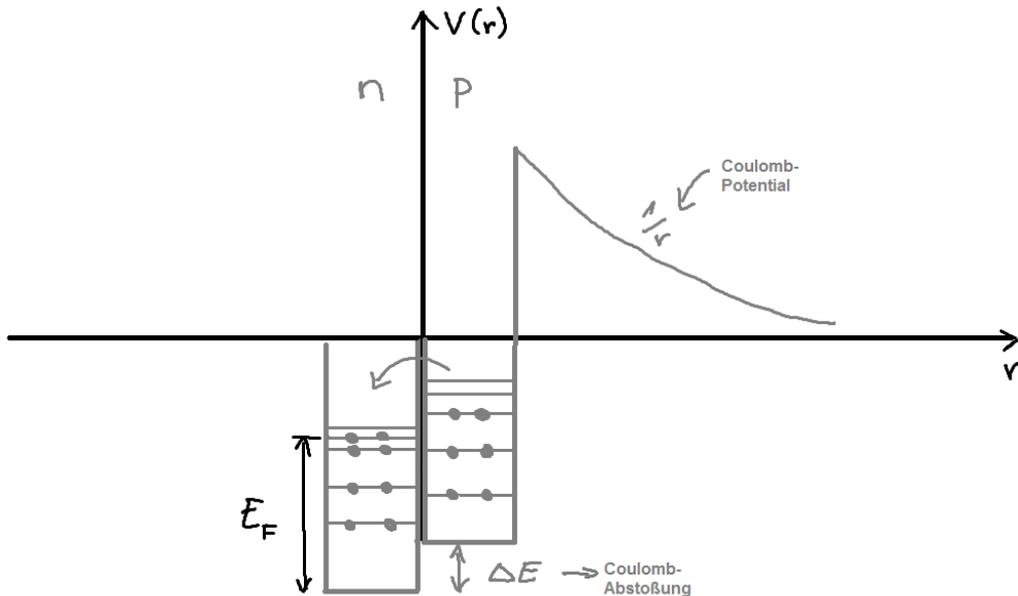


Abbildung 2.21: Zur Motivation des Asymmetrieterms

Auf Grund der Coulomb-Abstoßung der Protonen besitzen diese eine schwächere Bindung, d.h. der Potentialtopf der Protonen ist angehoben. Bei stabilen Kernen müssen die Fermi-Energien von Protonen und Neutronen in etwa gleich

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

sein, sonst treten β -Zerfälle auf (Übergang von $n \rightarrow p$ oder $p \rightarrow n$), bis sich die Energien hinreichend weit angeglichen haben. Dies bedeutet für den Einfluss der Asymmetrie auf die Bindungsenergie des Kerns, dass ein Kern mit Neutronenüberschuss eine geringere Bindungsenergie besitzt als ein Kern mit gleicher Nukleonenzahl, aber $N = Z$. Die Ursache liegt darin, dass bei höher liegenden E_F die Niveaus dichter liegen als bei niedrigen E_F . Da die Verschiebung der Bindungsenergie der Protonen durch die Coulomb-Abstoßung verursacht wird, die für kleine Kerne gering ist, ist für diese Kerne $N = Z = \frac{A}{2}$. Für größere Kerne ist die Coulomb-Anhebung größer und somit $N > Z$. Dieser Effekt ist bislang im Tröpfchenmodell noch nicht berücksichtigt.

Eine quantenmechanische Rechnung liefert für die Differenz der Bindungsenergien, dass

$$\Delta E \sim (Z - N)^2 \quad (2.64)$$

⇒ Ein weiterer Korrekturterm für das Tröpfchenmodell

$$\begin{aligned} E_{B,A} &= -a_A \frac{(Z - N)^2}{A} = -a_A \frac{4(Z - A/2)^2}{A} \\ &= a'_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \end{aligned} \quad (2.65)$$

wird eingeführt.⁵

(v) Paarungsenergie:

Empirisch zeigt sich, dass für gg-Kerne (gerade Z , gerade N) eine starke Bindung auftritt, während für uu-Kerne (ungerade Z , ungerade N) eine schwächere Bindung auftritt. Dies ist im Tröpfchenmodell nicht erklärbar, d.h. es wird eine empirische Korrektur angebracht:

$$E_{B,P} = \begin{cases} +\delta & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug-Kerne} \\ -\delta & \text{für uu-Kerne} \end{cases} \quad (2.66)$$

für die man, ebenfalls empirisch, findet:

$$\delta \approx a_p \cdot A^{-1/2} \quad (2.67)$$

Beachte: Dies ist schwer verständlich (siehe Kommentar auf Seite 48, Mayer-Kuckuck), es gibt beispielsweise weder ein Di-Proton noch ein Di-Neutron.

⁵Beachte: $2(Z - A/2) = 2Z - A = (2Z - Z - N) = (Z - N)$. Der Faktor 4 wird in manchen Büchern vergessen (z.B. Bleck-Neuhaus)

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

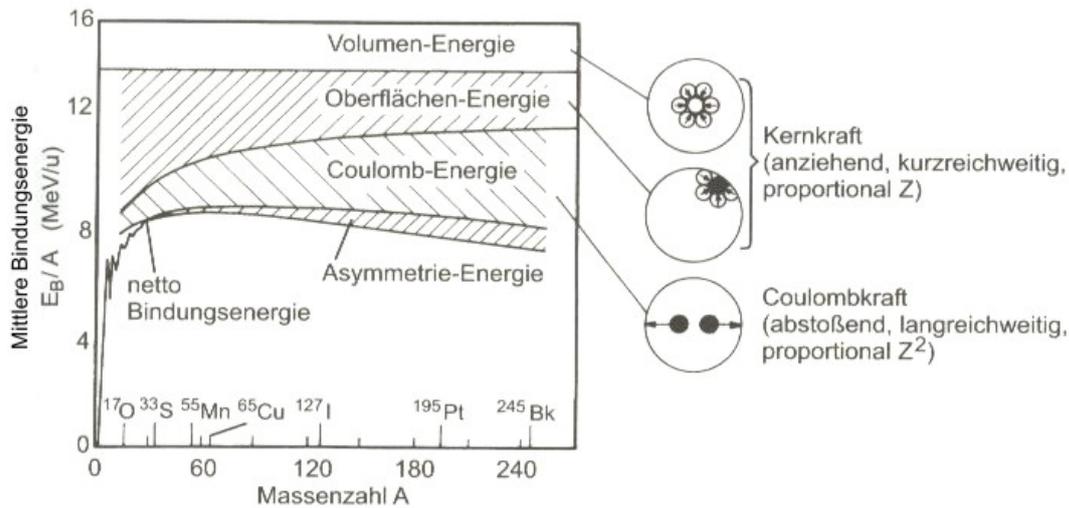
Mit all diesen Beiträgen erhält man schließlich die Weizsäcker-Bethe'sche Massenformel:

$$E_B = a_V \cdot A - a_O A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A \frac{4(Z - A/2)^2}{A} + E_{B,P} \quad (2.68)$$

die Parameter a_i können aus Anpassungen an Mesdaten gewonnen werden. Werte hierfür sind

$$\begin{aligned} a_V &= 15.67 \text{ MeV} \\ a_O &= 17.23 \text{ MeV} \\ a_C &= 0.71 \text{ MeV} \\ a'_A &= 93.15 \text{ MeV}, \quad a_A = 23.3 \text{ MeV} \\ a_P &= 11.2 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Dieses Modell gibt nach Anpassung den E_B -Kurvenverlauf grob wieder, für ein



Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Massenzahl

Abbildung 2.22: (aus Ref. [10])

derart naives Modell sogar erstaunlich gut. Die Feinstruktur (besonders bei kleinen A) wird jedoch nicht beschrieben. Starke Abweichungen treten auf für $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ (sog. *magische Zahlen*). Kerne, bei denen solche Abweichungen auftreten, sind beispielsweise ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{16}_8\text{O}_8$ und ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$. Diese Kerne besitzen besonders hohe Bindungsenergien, die erst mit dem Schalenmodell des Atomkerns zu verstehen sind.

Die Masse eines Kerns ist somit gegeben durch

$$m(Z, A) = Z \cdot m_H + (A - Z)m_n - E_B(Z, A) \quad (2.70)$$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

Für $A = \text{const.}$ lassen sich durch minimieren

$$\left. \frac{\partial m(Z, A)}{\partial Z} \right|_{A=\text{const.}} = 0 \quad (2.71)$$

die stabilen Kerne finden. Für das Minimum $Z = Z_0$ ist

$$\boxed{Z_0 = \frac{A}{1.98 + 0.015A^{2/3}}} \quad \text{Tal der stabilen Kerne} \quad (2.72)$$

Konsequenzen aus der Messenformel:

- (i) Die minimale Masse für $A = \text{const.}$ als Funktion von Z
- (ii) Variation der Kernmasse innerhalb einer Isobarenreihe:
 - quadratisch in Z
 - symmetrisch um Z_0

Ist A ungerade, so ist die Paarungsenergie $= 0$ und somit ergibt sich der in Abb. 2.26 dargestellte Verlauf. Für ug bzw. gu-Kerne ergibt sich somit 1 stabiles Isobar.

Für gerades A ist die Energie um $\pm\delta$ verschoben, so dass sich der Verlauf aus Abb. 2.27 ergibt. Die beiden energetisch eigentlich ungünstiger liegenden Kerne links und rechts von auf der selben Parabel sind stabil, da bei einem Zerfall ein $\Delta Z = 2$ überwunden werden müsste, dies ist im β -Zerfall jedoch nicht möglich!. Man erhält also drei (β -)stabile Isobare.

Falls $A < 14$ gerade ist und nicht durch 4 teilbar, d.h für Kerne mit den Ordnungszahlen 3, 5, 7 ist die Paarungsenergie

$$-\delta = \left(\frac{a_p}{\sqrt{A}} \right) \cdot A = a_p \sqrt{A} \quad (2.73)$$

klein, d.h die Differenz der (uu) und (gg)-Parabel ist klein. Somit sind (uu)-Kerne stärker gebunden als ihre benachbarten (gg)-Kerne mit $Z = Z_0 + 1$ (${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$). Für gerade $A \geq 16$ sind nur (gg)-Kerne nahe des Minimums stabil.

- (iii) Motivation für α -Zerfall:

Die Bindungsenergie pro Nukleon bei einem α -Teilchen ist

$$\frac{E_B(\alpha)}{A} = 7.07 \text{MeV}. \quad (2.74)$$

Die Emission von α -Teilchen ist möglich, wenn $E_\alpha > 0$:

$$E_\alpha = [m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m_\alpha] c^2 \quad (2.75)$$

Das Tröpfchenmodell liefert, dass $E_\alpha > 0$ für $A \gtrsim 150$. α -Zerfall ist möglich nahe diesem Limit, der leichteste α -Strahler ist ${}^{144}\text{Nd}$ mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 2 \cdot 10^{15} \text{a}$. Für $Z > 84$ sind alle Kerne α -instabil, $E_\alpha > 0, 2, 4, 6$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

(iv) Energiegewinnung durch Spaltung schwerer Kerne:

Im Falle einer symmetrischen Spaltung ist die frei werdende Energie

$$E_{\text{sp}} = [m(Z, A) - 2 \cdot m(Z/2, A/2)] c^2 \quad (2.76)$$

Die relevanten Terme im Tröpfchenmodell sind hierbei

- Oberflächenterm
- Coulombterm

Spaltung mit Energiegewinn ist prinzipiell möglich für $A > 90$, jedoch ist hier die Tunnelwahrscheinlichkeit noch nicht berücksichtigt. Spontane Spaltung ($\tau < 1\text{ns}$) findet man ab $\frac{Z^2}{A} > 50$ vor, in der Praxis findet man dies jedoch nur sehr selten vor, beispielsweise ist für ^{238}U : $\frac{Z^2}{A} = 36$. Der leichteste Kern, bei dem spontane Spaltung beobachtet werden kann ist ^{232}Th . Im Bereich $Z > 84$, in welchem alle Kerne instabil sind, sind die längsten Halbwertszeiten

$$\begin{aligned} T_{1/2}(^{232}_{90}\text{Th}) &= 1.4 \cdot 10^{10} \text{a} \\ T_{1/2}(^{238}_{92}\text{U}) &= 4.5 \cdot 10^9 \text{a} \end{aligned} \quad (2.77)$$

In Folge dieser langen Halbwertszeiten ist Uran das schwerste natürlich vorkommende Element auf der Erde.

Schwerere Kerne als ^{238}U ?

Derartige Kerne wurden künstlich produziert in Dubna und bei der GSI in Darmstadt:

107 Bohrium

108 Hassium

109 Meitnerium

110 Darmstadtium

111 Roentgenium

112 Copernicium

...

Die Extrapolation des Schalenmodells des Kerns (vgl. Kapitel 5) lässt sich auf stabile Inseln schließen bei $N = 184, 196, 318$, $Z = 114, 164$

2.5 Spin und Magnetische Momente

2.5.1 Spin und Magnetische Momente

- Proton und Neutron sind Spin- $1/2$ Teilchen (Fermionen)
- Aus der Hyperfeinstruktur der Energieniveaus vieler Atomkerne kann man schließen, dass Atomkerne ein magnetisches Moment besitzen. Dieses ist mit einem Drehimpuls verbunden:

$$\vec{I} = \text{Kernspin } I = \text{Kernspinquantenzahl} \quad (2.78)$$

- Man nimmt an, dass sich der Kernspin zusammensetzt aus der Vektorsumme der Nukleonenspins und der Bahndrehimpulse der Nukleonen:

$$\vec{I} = \sum_i (\vec{I}_i + \vec{L}_i) \quad \text{Summe über alle Nukleonen} \quad (2.79)$$

- Das magnetische Moment μ_I ist proportional zum Kernspin I und wird wie folgt geschrieben:

$$\vec{\mu}_I = g_K \mu_k \frac{\vec{I}}{\hbar}, \quad (2.80)$$

wobei

$$\mu_k = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3152 \cdot 10^{-8} \text{eV/T} \quad (2.81)$$

als Kernmagneton bezeichnet wird.

- Man beachte, dass das Kernmagneton im Vergleich zum Bohr'schen Magneton um einen Faktor $\frac{m_p}{m_e} = 1836$ kleiner ist.
- Der Faktor g_K ist der sogenannte Kern- g -Faktor und ist über das folgende Verhältnis definiert:

$$g_K = \frac{|\vec{\mu}_I|}{|\vec{I}|} = \frac{\mu_I}{I} \quad (2.82)$$

Dieser Faktor gibt an, um welchen Faktor sich das magnetische Moment des Kerns von demjenigen unterscheidet, das man für einen Drehimpuls I klassisch erwarten würde.

2.5.2 Hyperfeinstruktur

Die Hyperfeinstruktur-Aufspaltung kann benutzt werden, um den Kernspin I und auch die magnetischen Momente zu bestimmen;

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

- Die Zahl und der relative Abstand (ΔE) der Aufspaltungslinien hängen von I und J ab. (Falls J bekannt ist $\rightarrow I$)
- Die Absolute Größe der Aufspaltung ist durch den Intervallfaktor gegeben

$$\frac{A}{2} = \frac{\mu_I \cdot \mu_K \cdot B_0}{2I \cdot J} \quad (2.83)$$

B_0 ist das von der Hülle erzeugte Magnetfeld am Kernort und ist nicht präzise bekannt \Rightarrow Äußere Magnetfelder (für schwache Felder ist $V_{\text{mag}} \ll V_{I+J}$, sonst spricht man von starken Feldern)

2.5.3 Hyperfeinstruktur in äußeren Magnetfeldern

Gegeben sei ein äußeres Magnetfeld \vec{B} mit der Wechselwirkungsenergie

$$V_B^{\text{HFS}} = -\vec{\mu}_F \cdot \vec{B} \quad (2.84)$$

Man unterscheidet dann zwischen starken und schwachen Feldern:

i) Schwaches \vec{B} -Feld

Es sei $V_B \ll V_{\text{HFS}}$, dh. die \vec{I}, \vec{J} -Kopplung ist noch erhalten: Es kommt zu einer Präzessionsbewegung von \vec{I} und \vec{J} um $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$. \vec{F} präzediert um die z -Achse, die durch das externe Magnetfeld \vec{B} vorgegeben ist

$$\Rightarrow -\vec{\mu}_F \cdot \vec{B} = -\frac{1}{\hbar^2 |\vec{F}|^2} \left(g_K \mu_K \cdot \vec{I} - g_J \cdot \mu_B \cdot \vec{J} \right) \cdot \vec{F} \left(\vec{F} \cdot \vec{B} \right) \quad (2.85)$$

wobei g_J als Landé'scher g -Faktor bezeichnet wird:

$$g_J := \left\{ 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \right\} \quad (2.86)$$

Siehe hierzu auch Atomphysik, Zeemann-Aufspaltung der Feinstruktur-niveaus im Magnetfeld. Man beachte, dass auf Grund der Vorzeichen der Ladungen auch die magnetischen Momente von Elektronen und Kern unterschiedliche Vorzeichen haben. Zudem ist zu beachten, dass auf Grund der unterschiedlichen g -Faktoren das magnetische Moment μ_F und der Gesamtdrehimpuls F nicht in die gleiche Richtung zeigen (analog zu Zeeman-Aufspaltung der Feinstruktur-niveaus).

Die Störungsenergien ergeben sich wie üblich durch Übergänge von den Operatoren zu den Eigenwerten:

$$\begin{aligned} \Delta E_B^{\text{HFS}} = & -m_F \cdot B \cdot g_K \cdot \mu_K \frac{F(F+1) + I(I+1) - J(J+1)}{2F(F+1)} \\ & + m_F \cdot B \cdot g_J \cdot \mu_B \frac{F(F+1) + I(I+1) - J(J+1)}{2F(F+1)} \end{aligned} \quad (2.87)$$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

oder auch

$$\Delta E_{B,\text{schwach}}^{\text{HFS}} = g_F \cdot \mu_B \cdot B \cdot m_F \quad (2.88)$$

wobei

$$g_F := g_J \cdot \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} - g_K \frac{\mu_K}{\mu_B} \frac{F(F+1) + I(I+1) - J(J+1)}{2F(F+1)} \quad (2.89)$$

Da $\mu_K/\mu_B \approx 1/1800$, ist der erste Term dominant. Dies stellt die Zeeman-Aufspaltung der HFS-Niveaus dar. Man erhält eine äquidistante Aufspaltung jedes Niveaus in $(2F+1)$ Komponenten.

ii) Starkes \vec{B} -Feld

Ein starkes \vec{B} -Feld führt zur Entkopplung von \vec{I} und \vec{J} (ähnlich zu Paschen-Back-Effekt). Es werden somit zwei Energiekorrekturen nötig:

- (i) Zeeman-Aufspaltung (äußeres Feld wirkt auf starkes magnetisches Moment der Hülle)

$$\Delta E = g_J \cdot \mu_B \cdot m_J \cdot B \quad (2.90)$$

- (ii) Standard-Hyperfeinstruktur-Wechselwirkung:

$$V_{\text{HFS}} = \frac{\mu_I \mu_K \cdot B}{\hbar^2 \cdot I \cdot J} (\vec{I} \cdot \vec{J}) \quad (2.91)$$

Jedoch kommt es zu keine Kopplung von \vec{I} und \vec{J} zu \vec{F} ! \vec{I} und \vec{J} präzessieren unabhängig um \vec{B} , mit verschiedenen Geschwindigkeiten

$$\Rightarrow \overline{(\vec{I} \cdot \vec{J})} = \frac{1}{B^2} (\vec{I} \cdot \vec{B}) (\vec{B} \cdot \vec{J}) = I_z \cdot J_z \quad (2.92)$$

$$\Delta E = \frac{\mu_I \cdot \mu_J \cdot B_0}{J \cdot I} \cdot m_I \cdot m_J = A \cdot m_I \cdot m_J \quad (2.93)$$

Man beachte hierbei, dass am Kernort das von der Hülle erzeugte Magnetfeld dominiert und mit etwa 100T viel stärker ist als das äußere Feld.

- Es kommt zur Aufspaltung der J Energieniveaus im starken äußeren Magnetfeld in $(2J+1)$ Niveaus
- Zeeman-Aufspaltung der m_J -Niveaus nach m_I . In jeder Gruppe ($m_J = \text{const.}$) beträgt die Zahl der Unterzustände $(2I+1)$; Die Untersuchung des Aufspaltungsmusters in einem starken Magnetfeld stellt somit eine einfache Methode zur Bestimmung des Kernspin I dar.
- **Der Zeeman-Effekt der Hyperfeinstruktur geht in die Hyperfeinstruktur des Zeeman-Effekts über**

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

In einem starken externen Magnetfeld wird das Aufspaltungsmuster wegen $\mu_I \ll \mu_J$ durch m_j bestimmt. In jeder Gruppe ($m_j = \text{const.}$) beträgt die Zahl der Unterzustände $(2I + 1)$. Die Untersuchung des Aufspaltungsmusters in einem starken Magnetfeld stellt somit eine einfache Methode zur Bestimmung von I dar.

Zwischen den Energieniveaus gelten für elektromagnetische Übergänge (Photonen-Emission und -Absorption) die folgenden Auswahlregeln:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta F = 0, \pm 1 \\ \Delta m_F = 0, \pm 1 \end{array} \right\} \text{Zeemann-Gebiet} \quad (2.94)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta m_I = 0, \pm 1 \\ \text{oder } \Delta m_j = 0, \pm 1 \end{array} \right\} \text{Paschen-Back-Gebiet}$$

2.5.4 Experimentelle Methoden zu Bestimmung von μ_I und I

Wie bereits diskutiert, sind äußere Magnetfelder nötig, um die magnetischen Momente der Kerne präzise zu bestimmen. Das von der Hülle am Kernort erzeugte Magnetfeld ist nicht präzise genug bekannt, um die Bestimmung aus der HFS-Aufspaltung ohne externe Felder vorzunehmen.

Die Energiedifferenzen werden im Allgemeinen präzise durch Einstrahlung hochfrequenter elektromagnetischer Felder bestimmt. Zwei wichtige Methoden werden im Folgenden vorgestellt.

Darüber hinaus kann Information über den Kernspin auch direkt aus Streuexperimenten bestimmt werden.

Experimentelle Messung von magnetischen Momenten:

- (a) Atomstrahlexperiment (Rabi, 1939) Ein Strahl von Atomen von einer Quelle Q (Atomstrahlrohr) durchläuft inhomogene Magnetfelder (A, B) (Stern-Gerlach-Magnete):

$$F = \mu_z \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.95)$$

Zwischen den Bereichen A und B , befindet sich ein Bereich C mit einem homogenen Feld, welches eine Aufspaltung hervorruft. Durch Einstrahlung elektromagnetischer Wechselfelder (Mikrowellen) der Kreisfrequenz ω kommt es für

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \quad (2.96)$$

zu induzierten Übergängen (Hyperfeinstrukturfrequenz).

Eine Änderung der z -Komponente von $\vec{\mu}$ führt zu einer unterschiedlich starken Ablenkung im zweiten inhomogenen Magnetfeld \vec{B} , so dass die entsprechenden Atome den Detektor nicht erreichen (Abfall der Zählrate)

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

(b) Kernspinresonanzmethode:

Diese Methode wurde von F.Bloch und E.Purcell entwickelt.

- Probe in diamagnetischer Umgebung (z.B. Proton in Wassertropfen)
- homogenes Magnetfeld
- Für einen Kern mit Kernspin I kann die z -Komponente $(2I + 1)$ mögliche Werte annehmen. Die Energiedifferenz für verschiedene z -Komponenten beträgt:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \langle \vec{\mu}_I \cdot \vec{B} \rangle = g_K \cdot \mu_K \cdot \Delta I_Z \cdot B \\ &= g_K \cdot \mu_K \cdot B \cdot \Delta m_I\end{aligned}\quad (2.97)$$

- Ein Hochfrequenzfeld in einer Induktionsspule führt zu induzierten Dipolübergängen:

$$\Delta m = \pm 1 \Rightarrow \Delta E = \hbar \cdot \omega_L = g_K \cdot \mu_K \cdot B \quad (2.98)$$

mit der *Lamorfrequenz* ω_L , welche der Präzessionsfrequenz des Kernspins im Magnetfeld entspricht:

$$\omega_L = \frac{g_K \cdot \mu_K \cdot B}{\hbar} \quad (2.99)$$

- Der Nachweis der Resonanz kann über ein Verlustsignal oder induziertes Signal in einer zweiten Spule erbracht werden. Wichtig ist hierbei die unterschiedliche Besetzung der verschiedenen Niveaus, die im thermischen Gleichgewicht gegeben ist.

(c) Streuexperimente:

Die in Streuexperimenten gemessenen Winkelverteilungen sind sensitiv auf den Spin des Kerns.

Für die Streuung von Spin-0-Teilchen an einem Targetkern mit Spin-0 gilt die Rutherford-Streuformel. Für die Streuung von Spin-1/2-Teilchen führen Spin-Effekte zu Modifikationen, die durch die Mott-Streuformel erfasst werden. Eine Möglichkeit zur Bestimmung des Kernspins besteht in der Vermessung des Streuquerschnitts identischer Kerne aneinander, z.B. ^{10}B -Streuung and ^{10}B . Auf Grund der beteiligten identischen Teilchen ergibt sich eine Vorwärts-/Rückwärts-Symmetrie in differentiellen Wirkungsquerschnitt. Der Interferenzterm hängt von Spin des Kerns ab (siehe auch [4]):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z^2 \cdot e^2}{4E_{\text{kin}}} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} + \frac{1}{2I + 1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta/2 \cdot \cos^2 \theta/2} \cos \left(\eta \ln \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \quad (2.100)$$

wobei

$$\eta = \frac{Z^2 \cdot e^2}{\hbar^2 \cdot v_{\text{rel}}} \quad (2.101)$$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

mit v_{rel} als Relativgeschwindigkeit der beiden Kerne. Der Wirkungsquerschnitt ist in Abb. 2.33 für verschiedene Annahmen über den Kernspin ($S = I$) gezeigt.

2.5.5 Experimentelle Ergebnisse

(i) Proton und Neutron:

Mit Protonen wurden Kernspinresonanzexperimente und mit Neutronen Streuexperimente durchgeführt. Als Ergebnis dieser Experimente erhält man

$$\begin{array}{l} \mu_p = 2.79 \cdot \mu_K \\ \mu_n = -1.91 \cdot \mu_K \end{array} \quad (2.102)$$

welche als *anormale magnetische Momente* der Nukleonen bezeichnet werden. Mit dem Protonen-/Neutronenspin $1/2$ folgt damit

$$\begin{array}{l} g_K(p) = 5.59 \\ g_K(n) = -3.82 \end{array} \quad (2.103)$$

Für punktförmige, geladene Teilchen mit Spin $1/2$ erwartet man $g = 2$ (siehe Elektronen) \rightarrow deutlicher Hinweis auf Substruktur der Nukleonen! Eine Erklärung ist im Quark-Modell möglich. Das negative Vorzeichen von μ_n bedeutet, dass Spin und magnetisches Moment entgegengesetzt ausgerichtet sind.

(ii) Magnetische Momente von Kernen (im Grundzustand): Der Spin der Grundzustände aller stabilen und der meisten radioaktiven Kerne ist bekannt.

- (gg)-Kerne haben Spin 0 (im Grundzustand) ($\uparrow\downarrow$ gepaarte Nukleonen)
- Kerne mit geradem A haben ganzzahligen Spin.
- (ug)- bzw. (gu)-Kerne haben halbzahligen Spin, Wertebereich: $I = 1/2, 3/2, \dots, 9/2$.
Man findet sogar Kerne mit besonders großem Kernspin: ${}_{50}^{125}\text{Sn}$ mit $I = 11/2$
und ${}_{71}^{176}\text{Lu}$ mit $I = 7$.

Messergebnisse für Kerne mit ungepaarten Protonen und Neutronen (gu)- und (ug)-Kerne:

- Korrelation von $|\vec{I}|$ und g_K oder μ_I
- Modell (Th. Schmitdt, 1937): Einteilchenmodell:
(gg)-Kerne besitzen Spin 0. \Rightarrow gepaarte Nukleonen, diese liefern keinen Beitrag zu \vec{I} . Somit muss \vec{I} aus den ungeparten Nukleonen resultieren, wobei die beiden Beträge

(i) Bahndrehimpuls $\vec{\ell}$

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

(ii) Spin $1/2$

zwei Möglichkeiten zulassen:

$$\Rightarrow I = \ell \pm 1/2 \quad (2.104)$$

Beispielsweise kann $I = 5/2$ realisiert sein durch $\ell = 3, s = -1/2$ oder durch $\ell = 2, s = +1/2$. μ kann aus der Hyperfeinstrukturaufspaltung in Magnetfeldern bestimmt werden, dabei wird die Korrelation zwischen μ und Z, N, ℓ, s durch das Einteilchenmodell grob beschrieben, es sind jedoch deutliche Abweichungen sichtbar.

- **Modellkurven ($\hat{=}$ Schmidt-Linien):**

Magnetische Momente liegen innerhalb von Bändern, die durch Kurven mit $\mu_p = 2.79$ und $\mu_n = 1.0$ bzw. $\mu_n = -1.91$ und $\mu_n = 0$ begrenzt sind.

- **Limitierungen:**

- zu einfach, Korrelationen zwischen Nucleonen werden vernachlässigt (Rumpfkern $\ell = 0, s = 0$ und ein Leuchtnucleon)
- g -Faktor von p und n im Kern $\neq g$ -Faktor der einzelnen Nucleonen

Bisher wurde angenommen, dass kugelsymmetrische Ladungsverteilungen in den Kernen vorliegen woraus die Hyperfeinstruktur und die Intervallregel resultieren. 1935 wurde jedoch an Europium durch Schmidt und Schüller eine Abweichung von der Intervallregel im HFS-Spektrum beobachtet.

→ Es muss eine nicht-kugelsymmetrische Ladungsverteilung vorliegen, *deformierte Kerne*

→ Quadrupolmoment des Kerns

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad V = \text{Kernvolumen} \quad (2.105)$$

→ Multipolentwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) \quad (2.106)$$

Je nach ℓ -Wert unterscheidet man

$\ell = 0$ Monopol. $Q = \text{Gesamtladung}$, $\phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot Q$

$\ell = 1$ Ein statisches Dipolmoment existiert auf Grund der Paritätserhaltung nicht:

$$\int r' \rho(r') \cdot d^3r' = 0 \quad (2.107)$$

da $\rho(r') = Q|\psi(r')|^2 = Q|\psi(-r')|^2 = \rho(-r')$ und somit das Integral über eine ungerade Funktion (gerade (ρ) · ungerade (r')) bei Integration über das gesamte Volumen verschwindet.

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

$\ell = 2$ Quadrupolmoment: Für einen rotationssymmetrischen Kern mit der z -Achse als Symmetrieachse ist

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \underbrace{\int (3z'^2 - r'^2) \rho(\vec{r}') d^3r'}_{Q_z} \quad (2.108)$$

\Rightarrow Abweichungen von der Intervallregel bei der Hyperfeinstruktur. Man unterscheidet dabei zwei Arten von Kernen:

$Q_z < 0$ prolate Kerne (zigarrenförmig), entspricht mit $\delta > 0$

$Q_z > 0$ oblate Kerne (diskusförmig), entspricht $\delta < 0$

Für ein klassisches Rotationsellipsoid, welches homogen geladen ist mit Gesamtladung $Q = Z \cdot e$ ist

$$Q_z = \frac{2}{5} Z \cdot e (b^2 - a^2) \quad (2.109)$$

wobei a und b die Halbachsen des Ellipsoids sind. mit $\bar{R} = \frac{a+b}{2}$ und $\Delta R = (b - a)$ ergibt sich dann

$$Q_z = \frac{2}{5} Z \cdot e \cdot 2\bar{R} \cdot \Delta R = c (Z \cdot \bar{R}^2) \cdot \underbrace{\left(\frac{\Delta R}{\bar{R}} \right)}_{=: \delta} \quad (2.110)$$

δ wird als *Deformationsparameter* bezeichnet

Einschub: Parität

Ausgehend von einem physikalischen System wird eine Spiegelung $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ zu einem (physikalischen System)' durchgeführt

$$\text{Phys. System } \begin{matrix} \xrightarrow{\text{Spiegelung}} \\ \vec{r} \rightarrow -\vec{r}, P \end{matrix} (\text{Phys. System})' \quad (2.111)$$

Dies kann durch den Paritätsoperator P ausgedrückt werden, welcher das Vorzeichen von polaren Vektoren ändert (z.B. $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$), das Vorzeichen von axialen Vektoren hingegen nicht (z.B. $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$).

$$\begin{aligned} P|\psi(\vec{r})\rangle &= |\psi(-\vec{r})\rangle \\ P^2|\psi(\vec{r})\rangle &= |\psi(\vec{r})\rangle \\ P^2 &= \text{id}, \quad \text{Eigenwerte } \pm 1 = \pi \end{aligned} \quad (2.112)$$

Wenn P und H kommutieren, so ist die Parität eine Erhaltungsgröße.

- Besitzt $\psi(\vec{r})$ den Paritätseigenwert $+1$, so spricht man von gerader Parität.
- Besitzt $\psi(\vec{r})$ den Paritätseigenwert -1 , so spricht man von ungerader Parität.

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

Wichtige Beispiele für die Parität sind die Kugelflächenfunktionen $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$:

$$PY_\ell^m = (-1)^\ell \cdot Y_\ell^m \quad (2.113)$$

Bei Teilchenreaktionen

$$\begin{aligned} a + b &\rightarrow c + d \text{ Streuung} \\ a &\rightarrow b + c \text{ Zerfall} \end{aligned} \quad (2.114)$$

ist die Parität für den Anfangszustand

$$P|\text{Anfang}\rangle = \underbrace{P|a\rangle \cdot P|b\rangle}_{\substack{\text{Parität der Teil-} \\ \text{chen} \\ \text{(Kernzustand)} \\ \text{(Innere Parität)}}} \cdot P|\text{rel. Bewegung}\rangle \quad (2.115)$$

Die Paritätserhaltung besagt nun, dass

$$\pi_a \cdot \pi_b \cdot (-1)^\ell = \pi_c \cdot \pi_d \cdot (-1)^{\ell'} = \pi_a \cdot \pi_b \cdot (-1)^\ell \cdot |\text{rel. Bewegung}\rangle \quad (2.116)$$

Für die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung ist die Parität erhalten, bei der schwachen Wechselwirkung ist die Paritätserhaltung jedoch verletzt!

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

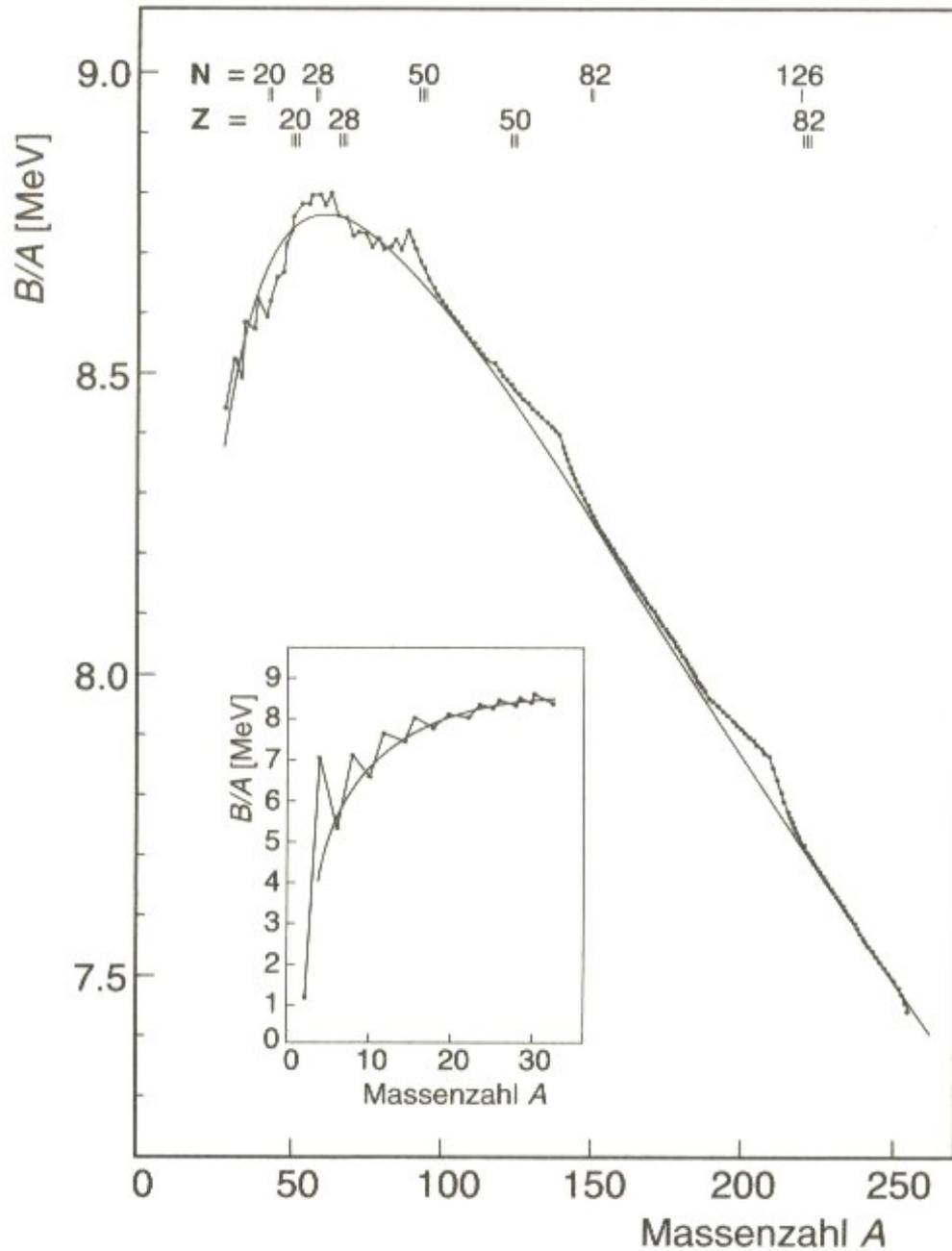


Abbildung 2.23: (aus Ref. [10])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

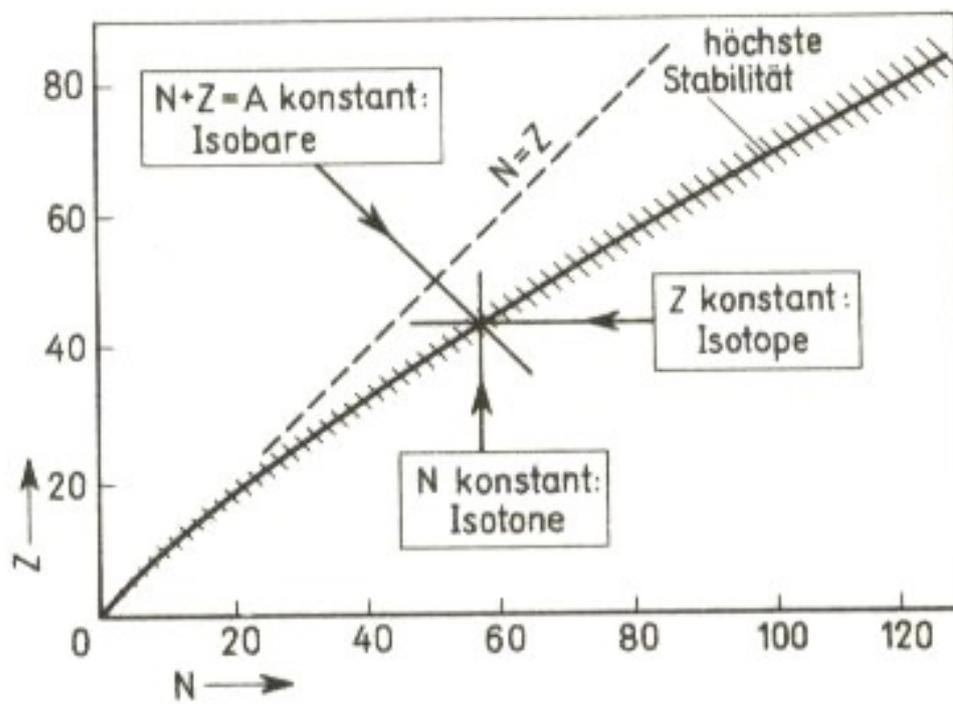


Abbildung 2.24: (aus Ref. [1])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

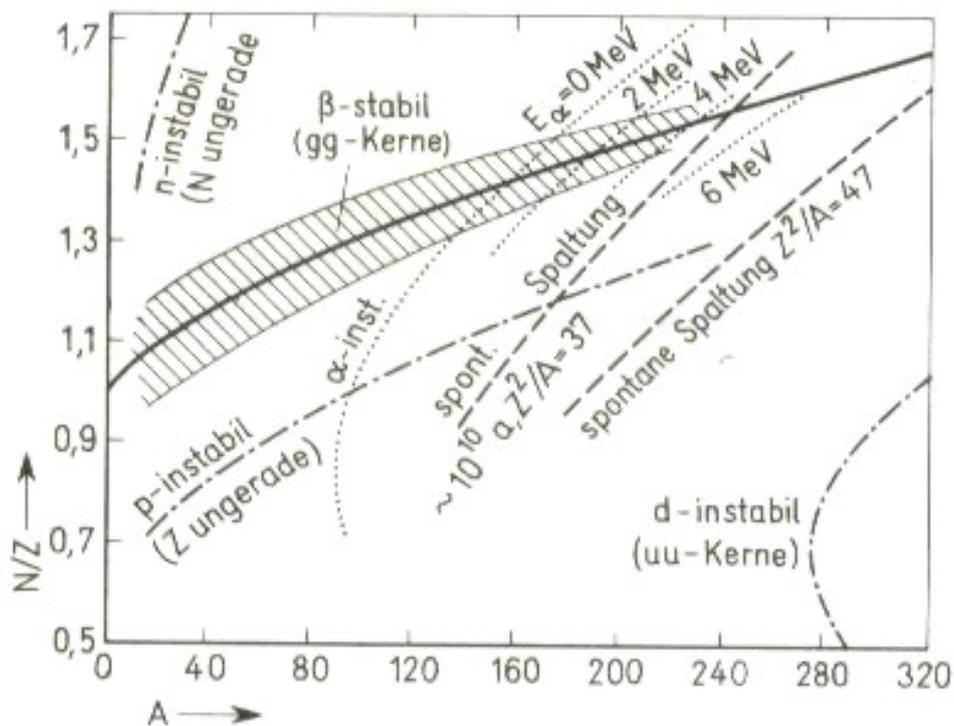


Abbildung 2.25: (aus Ref. [1])

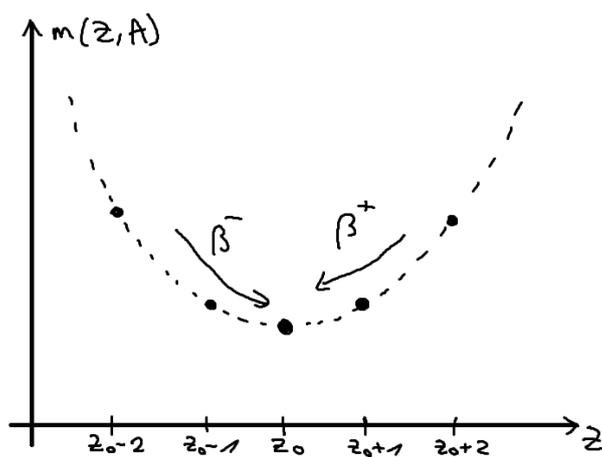


Abbildung 2.26: Kernmasse als Funktion der Kernladungszahl bei Kernen mit ungeradem A

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

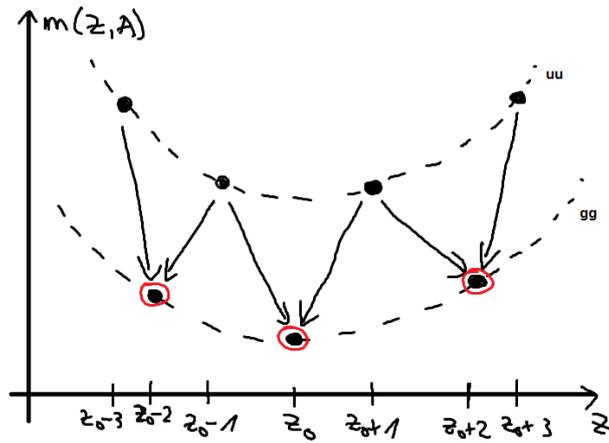


Abbildung 2.27: Kernmasse als Funktion der Kernladungszahl bei uu- und gg-Kernen

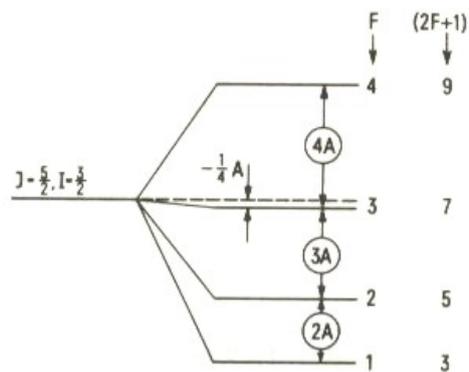


Abbildung 2.28: Hyperfeinstrukturaufspaltung: Multipllett für $J = \frac{5}{2}$ und $I = \frac{3}{2}$. (aus Ref. [1])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

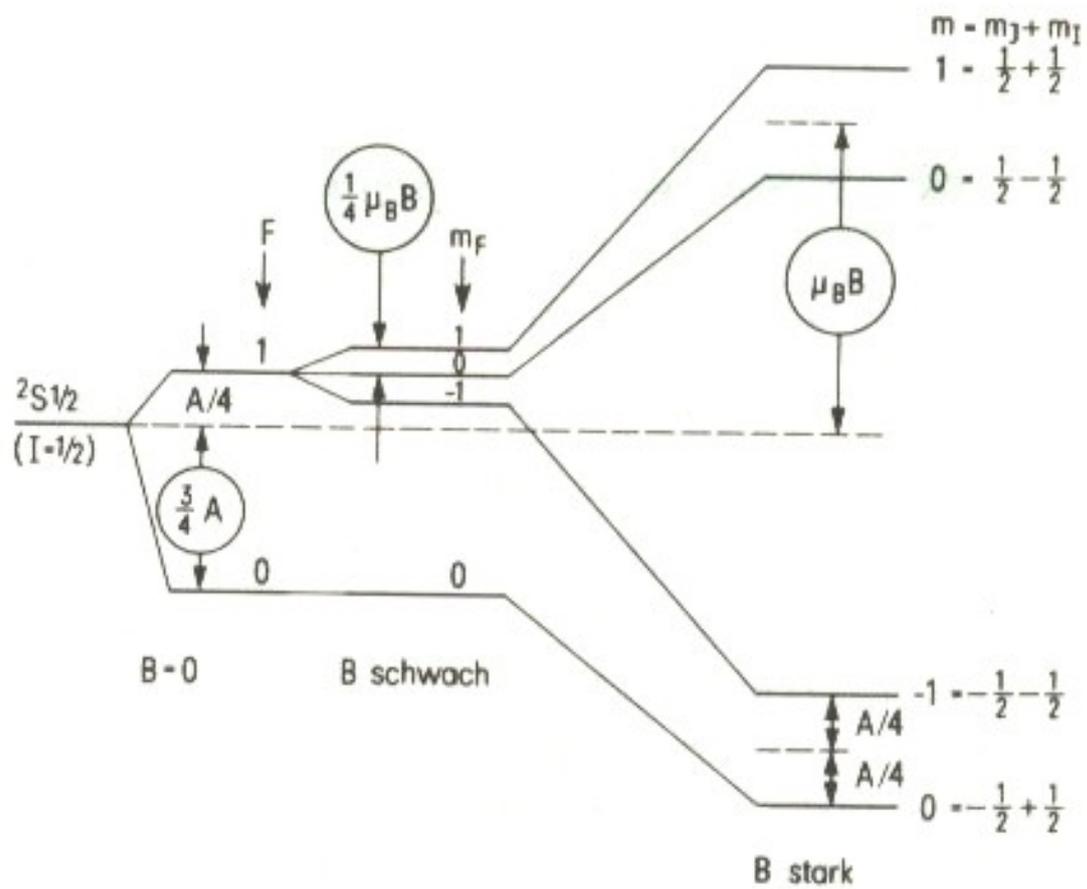


Abbildung 2.29: Aufspaltung der Hyperfeinstruktur-niveaus für $J = 1/2$ und $I = 1/2$ in einem schwachen und starken äußeren Magnetfeld. (aus Ref. [1])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

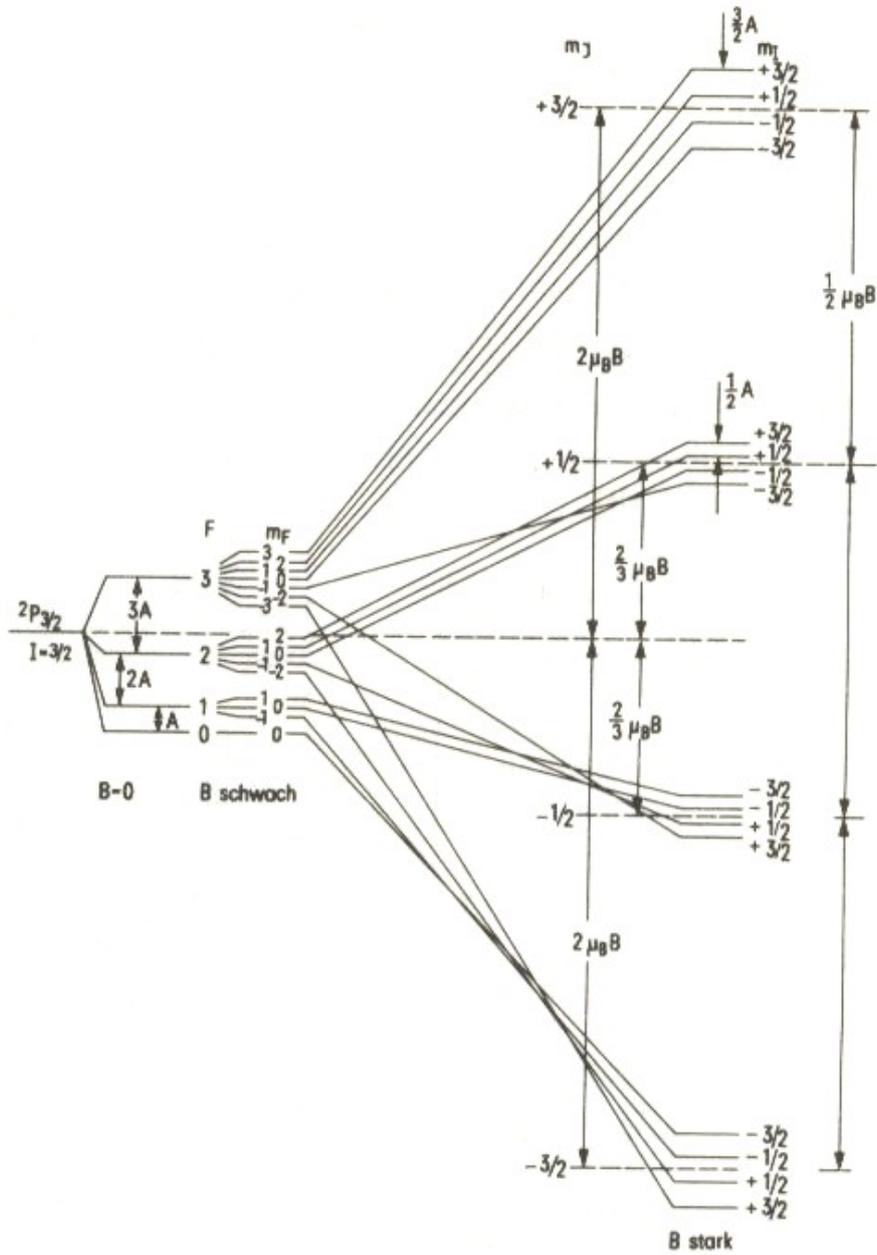


Abbildung 2.30: Aufspaltung der Hyperfeinstruktur-niveaus für $J = 3/2$ und $I = 3/2$ in einem schwachen und starken äußeren Magnetfeld. (aus Ref. [1])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

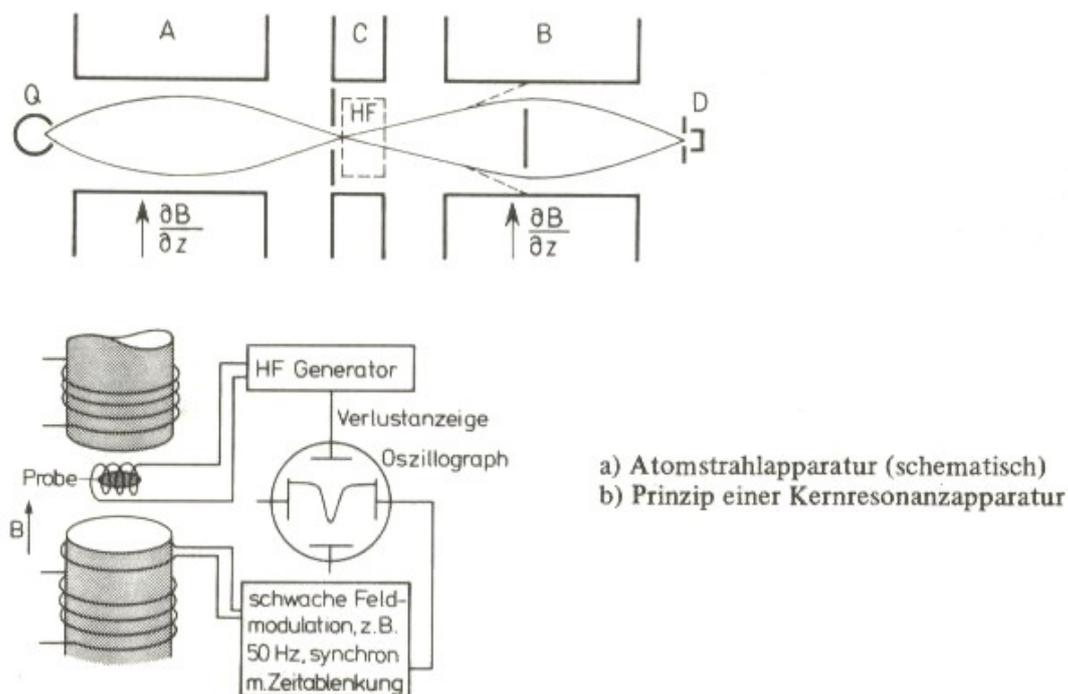


Abbildung 2.31: (aus Ref. [1])

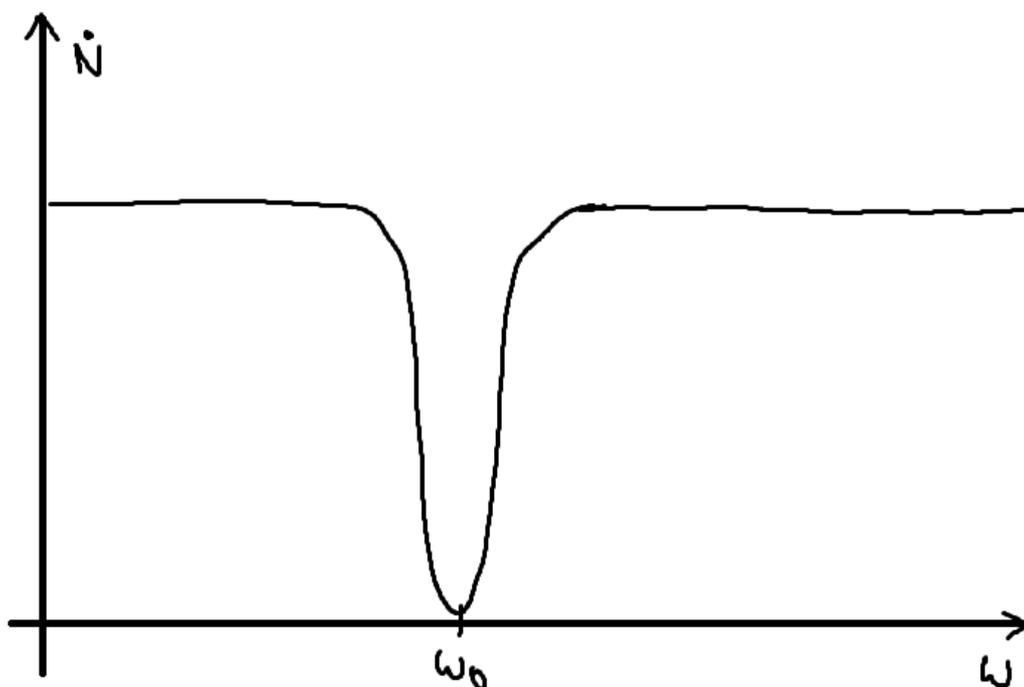


Abbildung 2.32: Zählrate beim Rabi-Experiment als Funktion der Frequenz des elektromagnetische Wechselfeldes

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

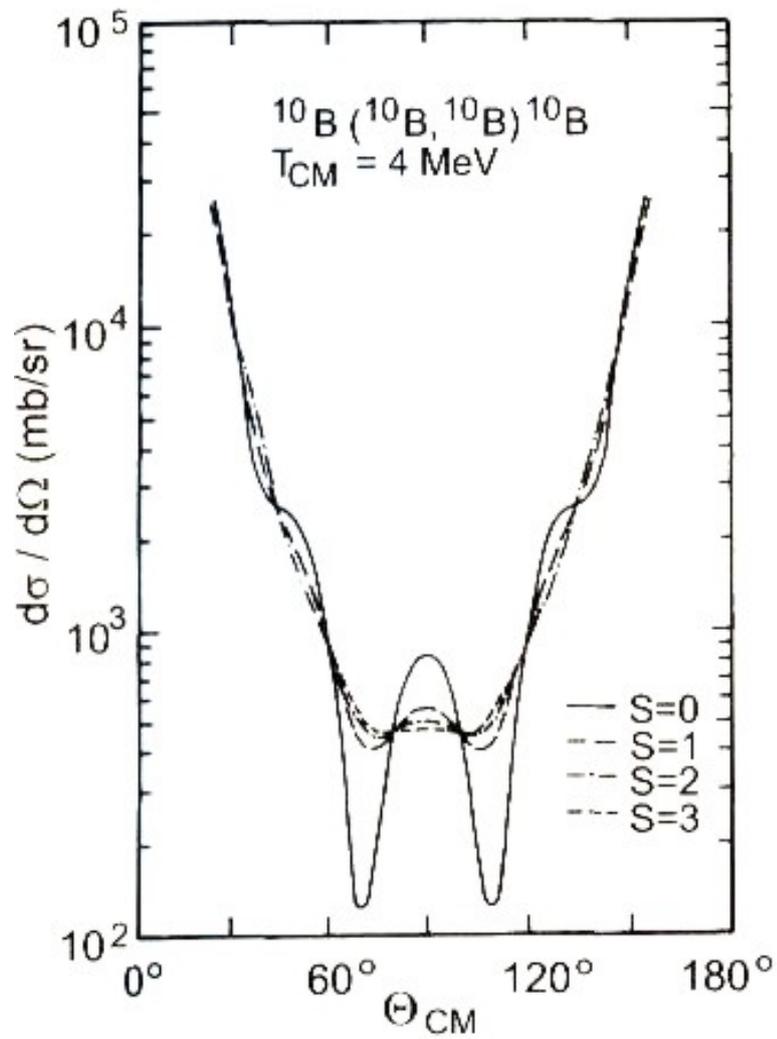


Abbildung 2.33: Theoretische Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für die Streuung von ^{10}B an ^{10}B für verschiedene Kernspinypothesen (aus Ref. [4])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

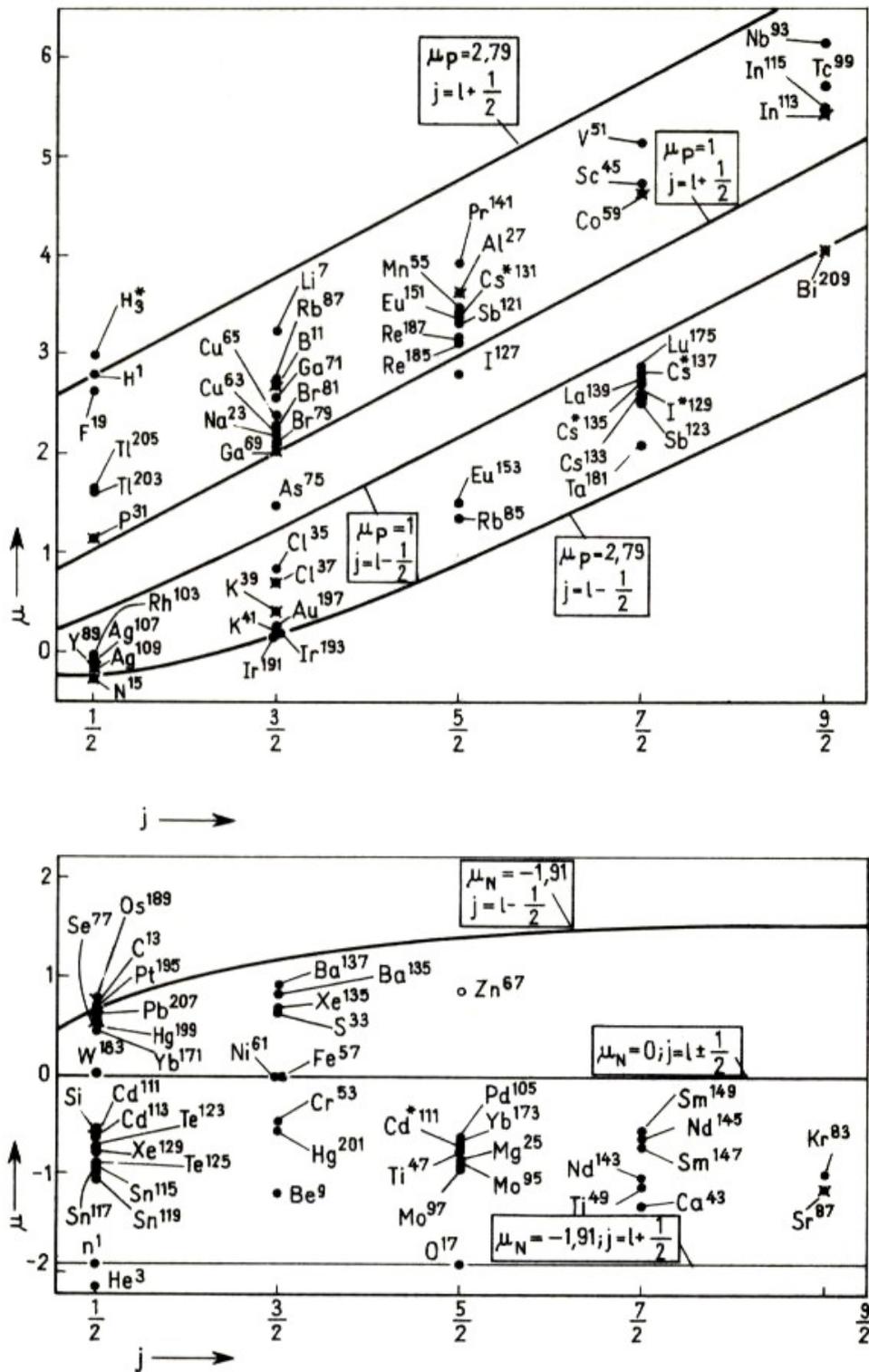


Abbildung 2.34: Magnetische Momente für Kerne mit ungepaartem Proton (oben) bzw. Neutron (unten). (aus Ref. [1])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne

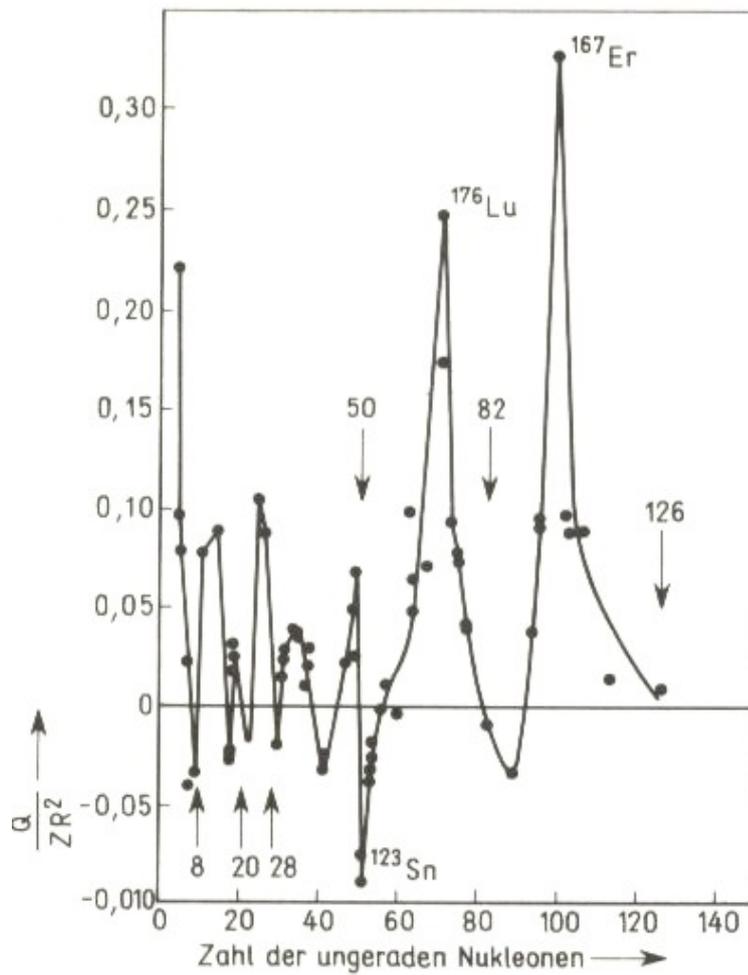
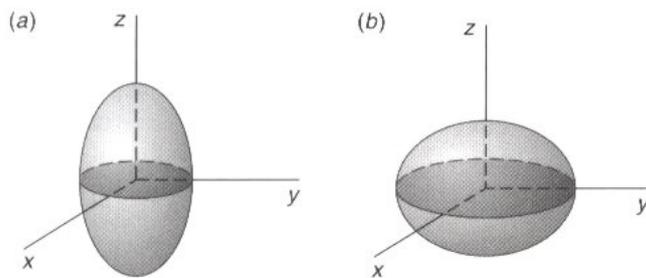


Abbildung 2.35: (aus Ref. [1])

2. Eigenschaften stabiler Atomkerne



Nicht-sphärische Kerne.

Für Kerne mit positivem Quadrupolmoment ist $\langle z^2 \rangle_{\text{mittel}}$ größer als $\langle x^2 \rangle_{\text{mittel}}$ oder $\langle y^2 \rangle_{\text{mittel}}$, sie sind zigarrenförmig (a). Für Kerne mit negativem Quadrupolmoment ist $\langle z^2 \rangle_{\text{mittel}}$ kleiner als $\langle x^2 \rangle_{\text{mittel}}$ oder $\langle y^2 \rangle_{\text{mittel}}$, sie sind diskusförmig (b).

Abbildung 2.36: (aus Ref. [10])

Literaturverzeichnis

- [1] Th. Mayer-Kuckuck, *Kernphysik*, Teuber Verlag
- [2] J. Bleck-Neuhaus, *Elementare Teilchen - Moderne Physik von den Atomen bis zum Standardmodell*, Springer Verlag
- [3] B. Povh, K.Rith, C.Scholz und F. Zetsche, *Teilchen und Kerne*, Springer Verlag
- [4] K. Bethge, G. Walter und B. Wiedemann, *Kernphysik*, Springer Verlag
- [5] D. Griffith, *Introduction to Elementary Particles*, Verlag Wiley-VCH
- [6] F. Halzen und A.D. Martin, *Quarks & Leptons*, Verlag J. Wiley
- [7] C. Grupen, *Teilchendetektoren*, BI Wissenschaftsverlag
- [8] W.R.Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Springer Verlag
- [9] K. Kleinknecht, *Detektoren für Teilchenstrahlung*, Teuber Verlag
- [10] E. Bodenstedt, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung*, BI Wissenschaftsverlag (1978)
- [11] P. A. Tipler und R. A. Llewellyn, *Moderne Physik*, Oldenburg Verlag (2002)
- [12] W. Demtröder, *Experimentalphysik 4, Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, Springer Verlag
- [13] *Reaktorphysik*, Universität Bonn (1982)