

## **2. Eigenschaften stabiler Atomkerne**

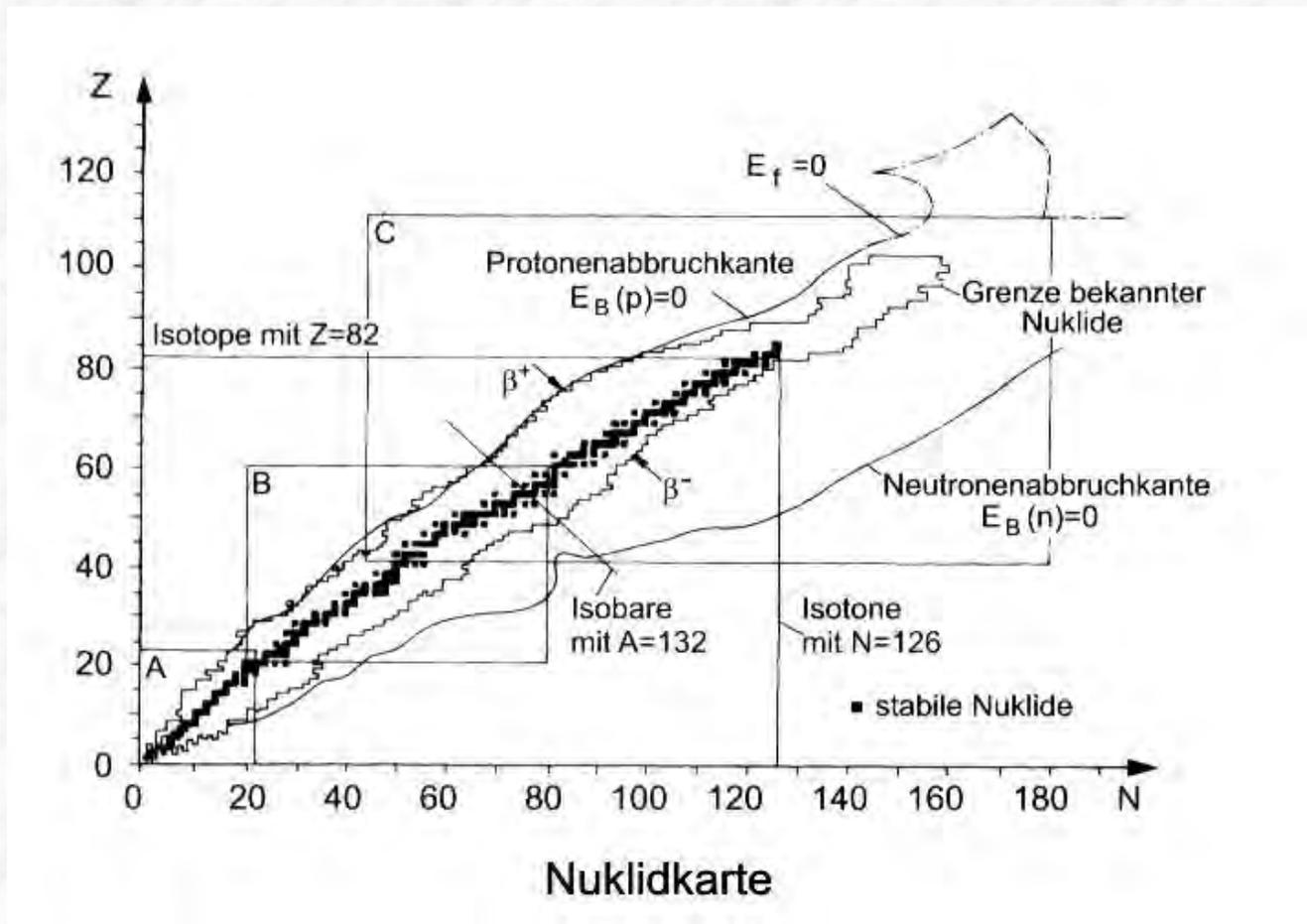
2.1 Nomenklatur

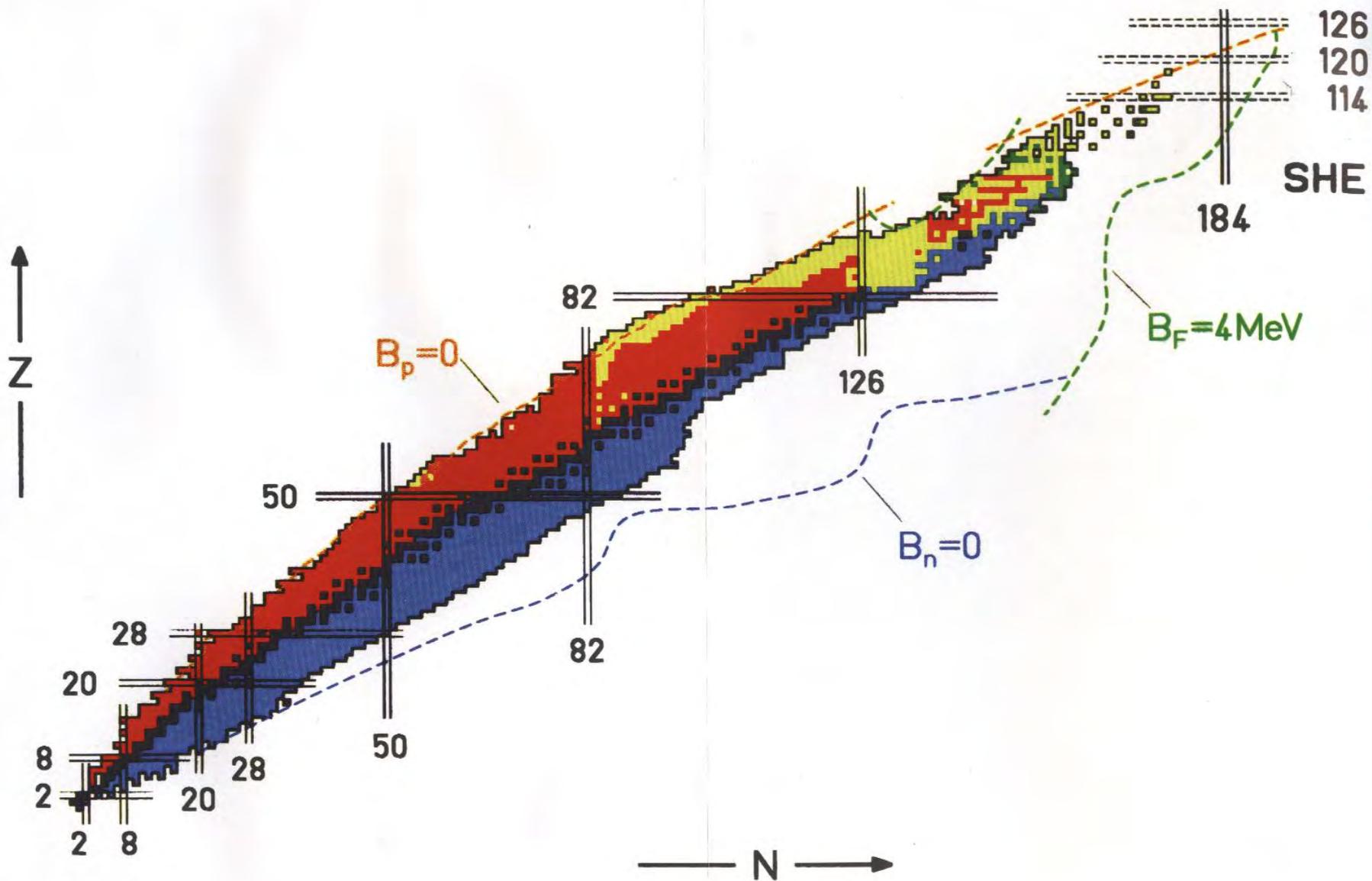
2.2 Ausdehnung der Atomkerne

2.3 Masse der Atomkerne

2.4 Das Tröpfchenmodell des Kerns

2.5 Spin und magnetische Momente





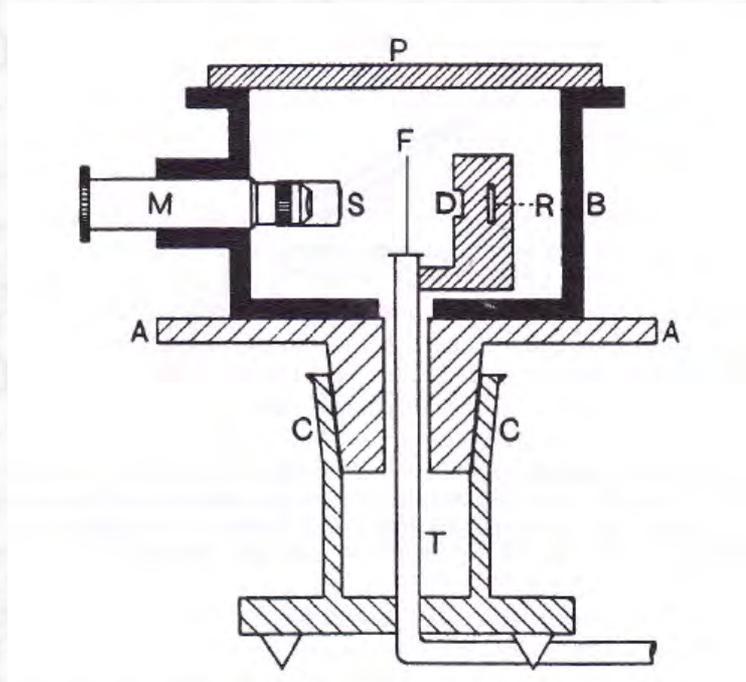


Abb. 2.1: Anordnung von Geiger und Marsden zur Beobachtung der Rutherford-Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie. Das Emanationsröhrchen R befindet sich in einem Bleiklotz, der nach links austretende kollimierte  $\alpha$ -Strahl passiert die Goldfolie F. Die  $\alpha$ -Teilchen, die nach einer Streuung auf den Szintillator S gelangen, werden durch das Mikroskop M betrachtet (aus Ref. [2]).

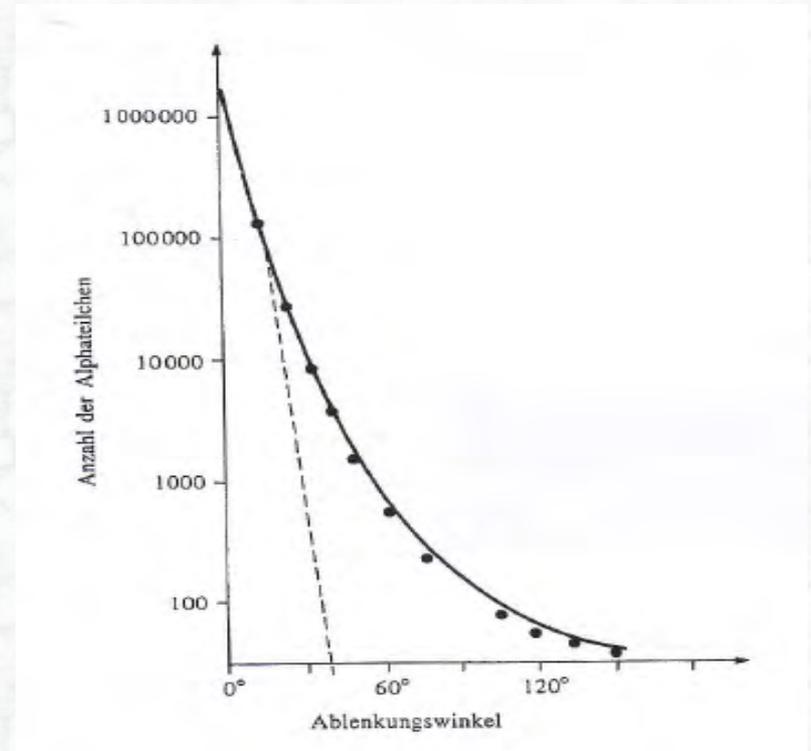


Abb. 2.2: Graphische Darstellung der Messergebnisse von Geiger und Marsden für die Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie. Die ausgezogene Linie stellt den theoretischen Verlauf für reine Coulomb-Streuung im elektrischen Feld einer Punkladung dar. Der gestrichelte Verlauf wäre bei homogener Massenverteilung im Atom (Thomson-Modell) zu erwarten. (aus Ref. [2]).

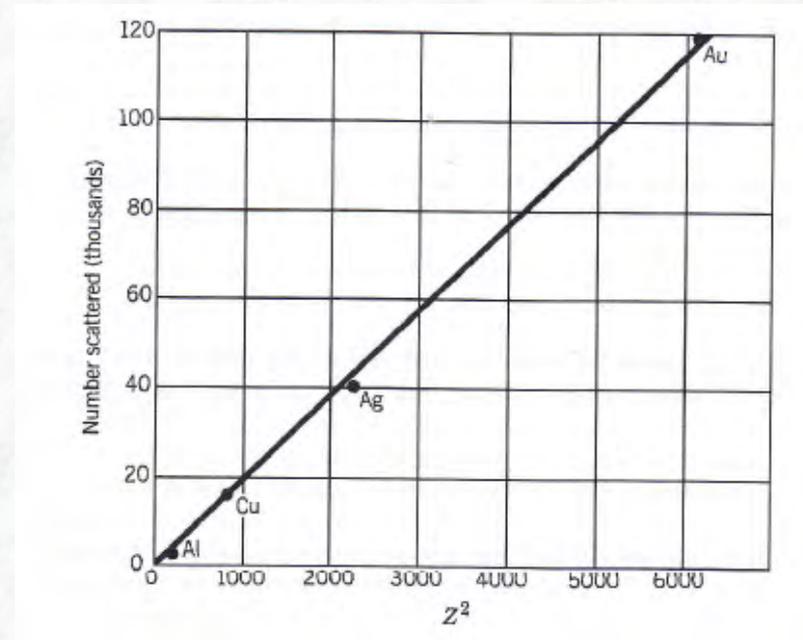
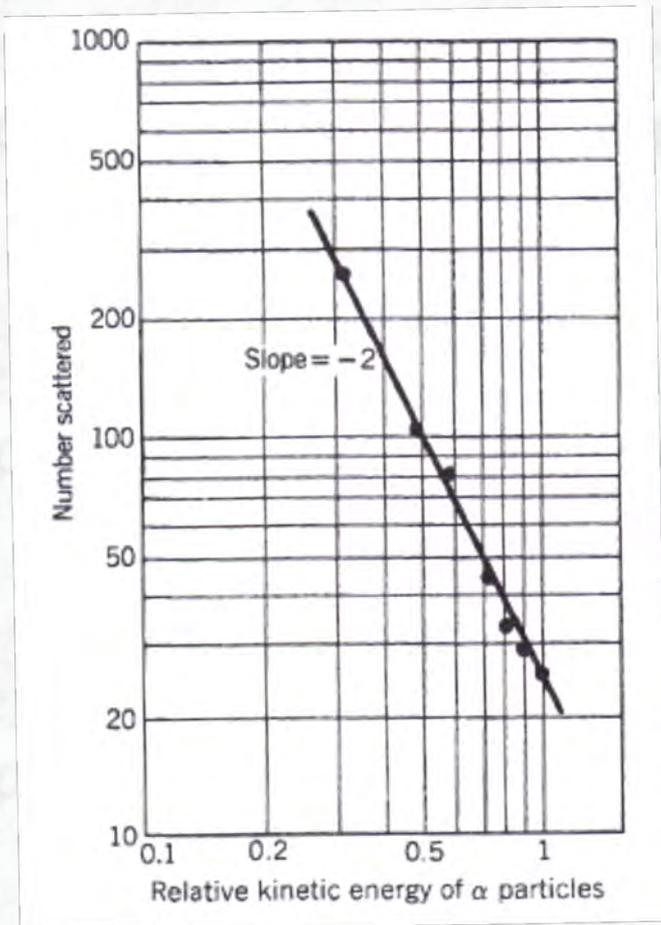


Abb. 2.3: Experimentelle Überprüfung der Rutherford-Formel:  
 (a) Abhängigkeit der Zählrate von der kinetischen Energie der  $\alpha$ -Teilchen  
 (b) Abhängigkeit der Zählrate von der Ladungszahl des Atoms  
 (aus Ref. [3])

## Interpretation des Rutherford-Experiments (und weiterer Experimente):

Die gemessene Winkelverteilung der  $\alpha$ -Teilchen wird durch die **Coulomb-Streuung** an einem punktförmigen Atomkern großer Masse und der Ladung ( $Z \cdot e$ ) beschrieben.

- (i) Atom enthält einen geladenen Atomkern der Größe  $R < \sim 10^{-14}$  m, der fast die gesamte Masse des Atoms enthält;
- (ii) Die Ladung beträgt  $+Z$  Elementarladungen, wobei  $Z$  die Ordnungszahl im periodischen System der Elemente bedeutet;
- (iii) Die Atomhülle enthält die entsprechende negative Ladung, so dass das Atom insgesamt elektrisch neutral ist. Diese Ladung ist an sehr viel kleinere Partikel gebunden.

## Streuung im Coulomb-Potential:

### Klassische Berechnung des Ablenkwinkels nach Ref. [3]

Das Streuzentrum liegt fest bei  $\vec{r} = (0,0,0)$ . Das Projektil hat den Anfangsimpuls  $\vec{p} = (p_0, 0, 0)$  parallel zur  $x$ -Achse und den Stoßparameter  $b > 0$  in  $y$ -Richtung. Es bleibt in der  $x$ - $y$ -Ebene und fliegt längs einer gekrümmten Trajektorie  $\vec{r}(t)$ , bewirkt durch die Coulomb-Kraft,  $F(r(t)) = zZ e^2 / (4\pi \epsilon_0) / r^2(t)$ .

In Polarkoordinaten ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) kommt das Projektil von  $x = -\infty$ , d. h. aus der Blickrichtung  $\varphi = 180^\circ$ , und verschwindet in Richtung des Ablenkwinkels  $\varphi = \theta$ . (D. h.  $\varphi(t)$  ist eine abnehmende Funktion,  $\vec{r}(t)$  dreht sich im Uhrzeigersinn.) Im Endzustand hat das Teilchen wieder dieselbe kinetische Energie wie am Anfang (elastischer Stoß), der Impuls also denselben Betrag  $p' = p_0$ . In Komponenten daher:  $\vec{p}' = (p_0 \cos \theta, p_0 \sin \theta, 0)$ .

Für die Bestimmung von  $\theta$  genügt es daher wie in Abschn. 2.2.2, nur die neue  $y$ -Komponente des Impulses zu berechnen. Nun ist  $\vec{F} \parallel \vec{r}$  und daher wie  $y = r \sin \varphi$  an jedem Ort  $\vec{r}(t)$  auch  $F_y = F \sin \varphi$ :

$$dp_y = F_y dt = F \sin \varphi(t) dt = zZ \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2(t)} \sin \varphi(t) dt, \quad (3.6)$$

Die mathematisch unangenehme  $r^{-2}$ -Abhängigkeit in  $F$  lässt sich mit Hilfe des anderen Erhaltungssatzes der Punktmechanik eliminieren: Der Drehimpuls  $L = (\vec{r} \times \vec{p})_z \equiv m r^2(t) d\varphi/dt$  ist längst der ganzen Trajektorie konstant und lässt sich aus den Anfangswerten bestimmen:  $L = -b p_0$  (negatives Vorzeichen, weil  $d\varphi/dt < 0$ : Drehung im Uhrzeigersinn).

Wir ersetzen also  $r^{-2} dt = (m/L) d\varphi$ :

$$dp_y = zZ \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2(t)} \sin \varphi(t) dt = zZ \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{m}{L} \sin \varphi d\varphi. \quad (3.7)$$

Diesen direkten Zusammenhang zwischen  $dp_y$  und  $d\varphi$  integrieren wir von den Anfangswerten  $p_y = 0$ ,  $\varphi = \pi$  bis zu den Endwerten  $p'_y = p_0 \sin \theta$ ,  $\varphi = \theta$ :

$$\int_0^{p'_y} dp_y = zZ \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{m}{L} \int_\pi^\theta \sin \varphi d\varphi \Rightarrow p'_y = zZ \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{m}{L} (-\cos \theta - 1). \quad (3.8)$$

Mit  $p'_y = p_0 \sin \theta$ ,  $L = -b p_0$ ,  $E_{\text{kin}} = p_0^2 / (2m)$ , sowie  $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ ,  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ ,  $\cot = \cos / \sin$  folgt als Endergebnis Gl. (3.5):

$$b = zZ \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{2E_{\text{kin}}} \cot \frac{\theta}{2} = \frac{\rho_0}{2} \cot \frac{\theta}{2}.$$

2.2.2. Quantenmechanische Ableitung der Rutherford - Formel (vgl. H. Rollnik, Quantentheorie)

Betrachte elastische Streuung von nichtrelativistischen spinlosen Teilchen unter dem Einfluß eines freien Potentials  $V(r)$

$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$

Teilchenstrahl mit Impuls  $\vec{p}$  fällt auf ein Kraftzentrum (stationär)

einlaufende Welle:  $\Psi_p(r) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E \cdot t}$

$E = \text{Energie des Streuprozesses} \rightarrow E = \frac{p^2}{2m}$

Der zeitunabhängige Teil genügt der stationären Schrödingergleichung:

$(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r)) \Psi_p(r) = E \cdot \Psi_p(r)$

$\rightarrow (\Delta^2 + k^2) \Psi_p(r) = U(r) \cdot \Psi_p(r)$

mit  $|\vec{k}| = |\vec{p}|/\hbar = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Für die Lösung der Gleichung gilt für große Abstände (große  $|\vec{r}|$ )

$\Psi_p(\vec{r}) \approx e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\vec{p}, \vec{n}) \frac{e^{ikr}}{r}$   
(auslaufende Kugelwelle)

mit:  $|\vec{k}| = \frac{|\vec{p}|}{\hbar} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$f(\vec{p}, \vec{n}) = \text{Streuamplitude}$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{p}, \vec{n})|^2$

Für die Funktion  $\Psi_p(r)$  kann eine Integralgleichung abgeleitet werden

$\rightarrow$  Lippmann - Schwinger Gleichung

$\Psi_p(\vec{r}) = \Psi_p^{(0)}(\vec{r}) + \int G_k(\vec{r}, \vec{r}') U(\vec{r}') \cdot \Psi_p(\vec{r}') \cdot d^3 r'$

wobei:  $U(\vec{r}) := \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r})$

$\Psi_p^{(0)}(\vec{r})$  eine Lösung der freien Schrödingergl.  $(\Delta^2 + k^2) \Psi_p^{(0)}(\vec{r}) = 0$ .

$G_k(\vec{r}, \vec{r}') = \text{Green'sche Funktion des}$

Green'sche Funktion des Helmholtz-Operators:

$$G_k(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Für die asymptotische Form der Wellenfunktion (große Entfernung vom Streuzentrum,  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ ) gilt:

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - r' \cdot \cos\theta \quad \theta = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \Psi_P(\vec{r}) = e^{ik\vec{r}} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \int e^{-ik\vec{r}'\cos\theta} U(\vec{r}') \Psi_P(\vec{r}') d^3r'$$

Somit ergibt sich für die Streuamplitude:

$$f(\vec{p}, \vec{n}) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\frac{p}{\hbar} \vec{n} \cdot \vec{r}'} U(\vec{r}') \cdot \Psi_P(\vec{r}') d^3r'$$

$$f(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\frac{1}{\hbar} \vec{p}' \cdot \vec{r}'} U(\vec{r}') \cdot \Psi_P(\vec{r}') d^3r'$$

$\vec{n}$  = Richtung des auslaufenden Impulses  $\vec{p}'$   
 $\vec{p}' = p \cdot \vec{n}$

II. Lösen der Integralgleichung durch einen Reihenansatz

$$\Psi_P = \Psi_P^{(0)} + \Psi_P^{(1)} + \Psi_P^{(2)} + \dots$$

Störungsreihe

Nullte Näherung: Einfluß des Potentials wird vernachlässigt

$$\Rightarrow \Psi_P^{(0)} = e^{i\frac{p}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}$$

Erste Näherung: Einsetzen der 0. Näherung in die rechte Seite der DGL:

$$\Rightarrow \Psi_P^{(1)}(\vec{r}) = \int G_k(\vec{r}, \vec{r}_1) U(\vec{r}_1) \cdot \Psi^{(0)}(\vec{r}_1) d^3r_1$$

$\hat{=}$  Born'sche Näherung für die Streuamplitude

$$\Rightarrow$$

$$f^{(1)}(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \cdot \int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}' \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} d^3r$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) \cdot d^3r$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) \cdot d^3r$$

mit  $\vec{q} := (\vec{p}' - \vec{p})$  = Impulsübertrag

d.h.: im Born'scher Näherung wird die Streuamplitude durch die Fourier-Transformierte des Potentials bezüglich des Impulsübertrags  $\vec{q} = (\vec{p}' - \vec{p})$  gegeben.

$$f^{(1)}(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \cdot \tilde{V}(\vec{q})$$

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot V(\vec{r}) \cdot d^3r$$

Impulsübertrag  $q^2 = (\vec{p}' - \vec{p})^2 = \vec{p}'^2 + \vec{p}^2 - 2\vec{p}'\vec{p}$   
 $= 2 \cdot p^2 (1 - \cos\theta)$

$\theta: 0 \rightarrow \pi$   
 $q^2: 0 \rightarrow 4p^2$

Beispiel 1:

Coulomb-Streuung eines nichtrel. Teilchens (Spin 0, Ladung -e) an punktförmigem Teilchen mit Ladung +Ze

$$V(r) = -\frac{Z \cdot e^2}{r}$$

Poissongleichung:  $\Delta V(r) = 4\pi \cdot Z \cdot e^2 \delta^3(\vec{r})$

$$f^{(1)}(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{q}) = \frac{2mZ \cdot e^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{(1)}(\vec{p}, \vec{p}')|^2 = (Z \cdot e^2)^2 (2m)^2 \cdot \frac{1}{q^4}$$

= Rutherford'sche Streuformel

Man beachte: die Planck'sche Konstante  $\hbar$  fällt heraus

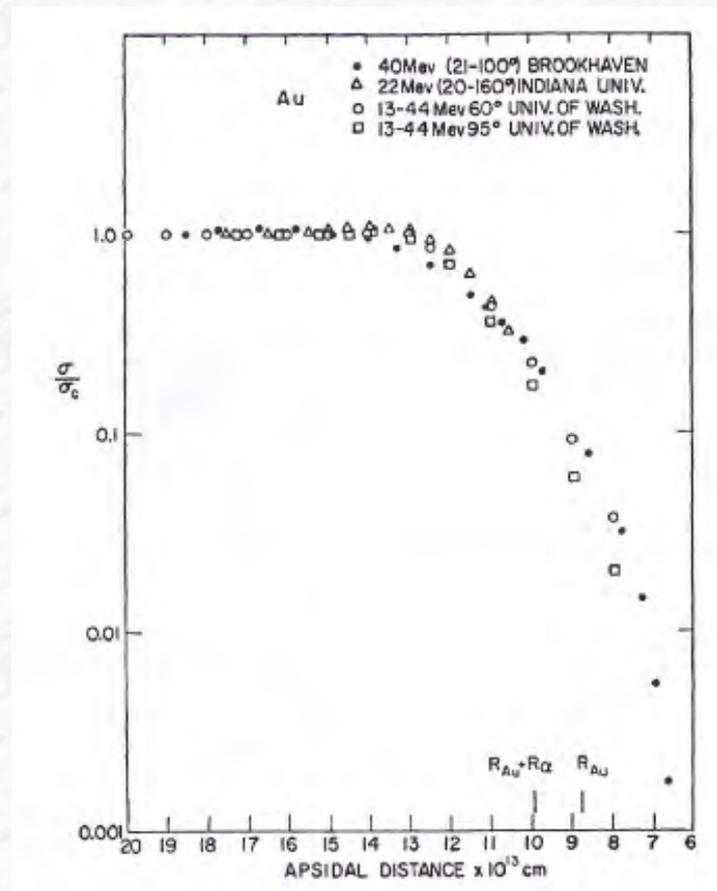
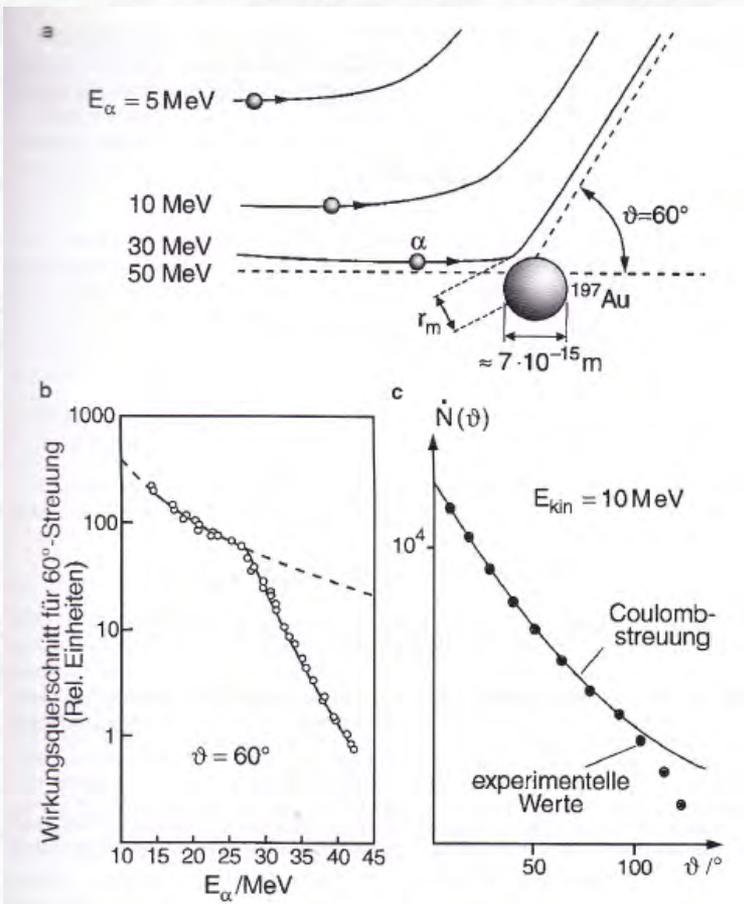
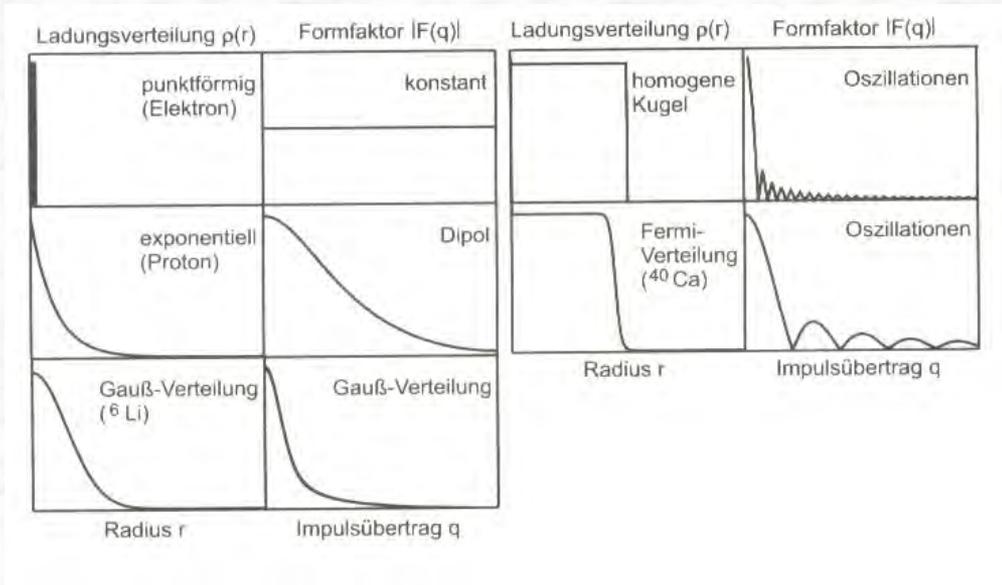


Abb. 2.4: Beobachtete Abweichungen von der Rutherford-Formel:

- (a) Gemessener Wirkungsquerschnitt als Funktion der kinetischen Energie der  $\alpha$ -Teilchen für einen festen Streuwinkel von  $\theta = 60^\circ$  und als Funktion des Streuwinkels für eine kinetische Energie von 10 MeV.
- (b) Verhältnis des gemessenen Wirkungsquerschnitts zum Coulomb-Streuquerschnitt, dargestellt als Funktion des kleinsten Abstands der klassisch berechneten Bahn der  $\alpha$ -Teilchen vom Streuzentrum. (aus Ref. [3])

Abb. 2.5



Ladungsverteilung $f(r)$	Formfaktor $F(q)$
Punkt $\frac{1}{4\pi} \delta(r)$	1 konstant
exponentiell $\left(\frac{a^3}{8\pi}\right) e^{-ar}$	$\left(\frac{1+q^2}{a^2\hbar^2}\right)^{-2}$ Dipol
Gauß $\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-a^2r^2/2}$	$\exp\left(-\frac{q^2}{2a^2\hbar^2}\right)$ Gauß
homogene Kugel $\begin{cases} C \text{ für } r \leq R \\ 0 \text{ für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ oszillierend mit $\alpha =  q R/\hbar$

Tabelle 1: Zusammenhang zwischen Ladungsverteilung und Formfaktor für einige kugelsymmetrische Ladungsverteilungen

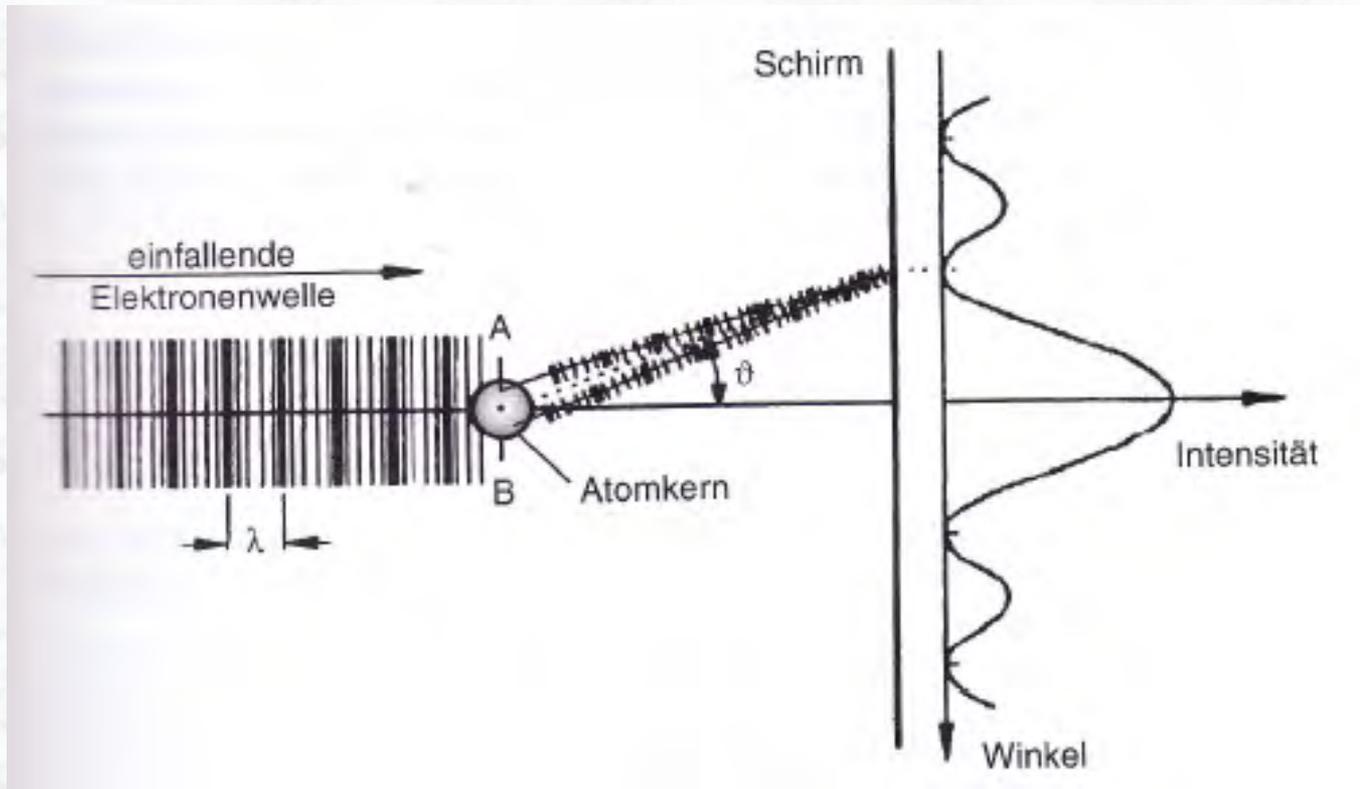


Abb. 2.6: Zur Entstehung des Phasenunterschieds der an verschiedenen Volumenelementen des Kerns entstehenden Streuwellen (aus Ref. [3]).

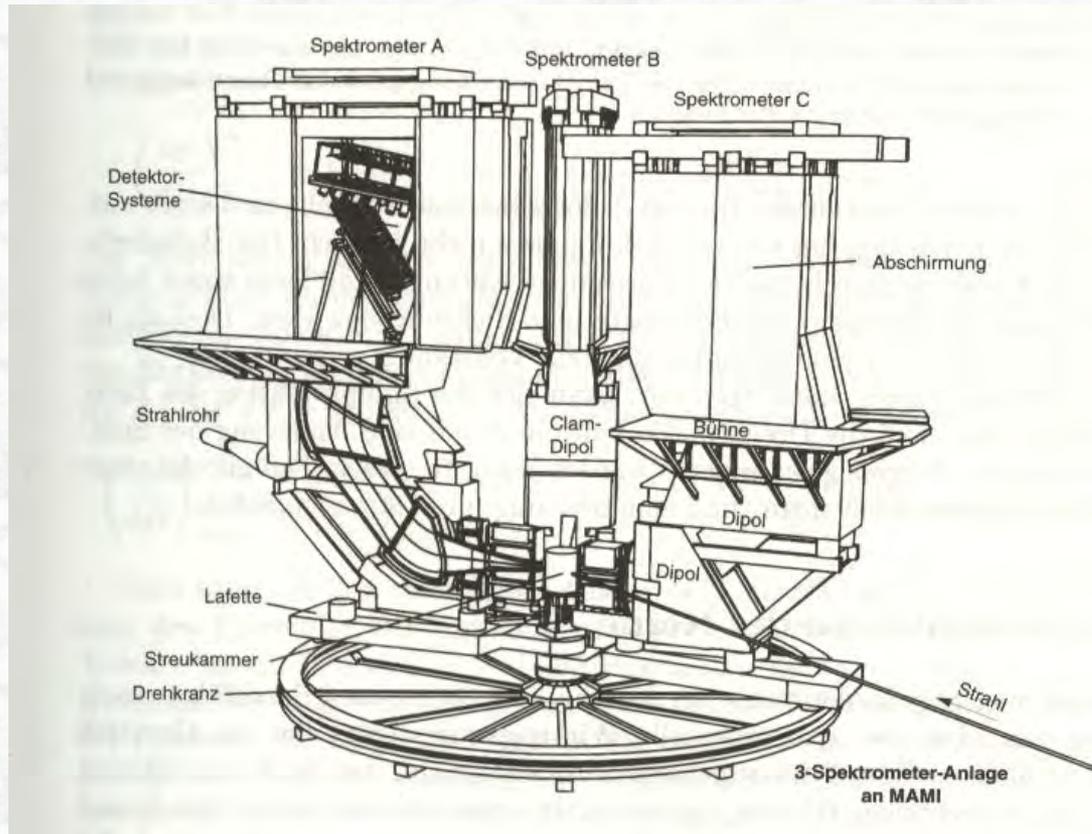


Abb. 2.7: Experimenteller Aufbau zur Messung der Elektronstreuung an Protonen und Kernen am Elektronenbeschleuniger MAMI-B (Mainzer Mikrotron). Die höchste erreichbare Elektronenenergie beträgt 820 MeV. In diesem Bild sind drei Magnetspektrometer gezeigt, die separat zum Nachweis elastischer Streuung und in Koinkidenz zum detaillierten Studium der inelastischen Kanäle dienen. Das Spektrometer A ist aufgeschnitten gezeigt. Die gestreuten Elektronen werden durch zwei Dipolmagnete und mit Hilfe eines aus Drahtkammern und Szintillationszählern bestehenden Detektorsystems impulsanalysiert. Zum Größenmaßstab: der Durchmesser des Drehkranzes beträgt ca. 12m. (Dieses Bild wurde von Arnd P. Liesenfeld (Mainz) hergestellt und freundlicherweise zur Veröffentlichung überlassen).

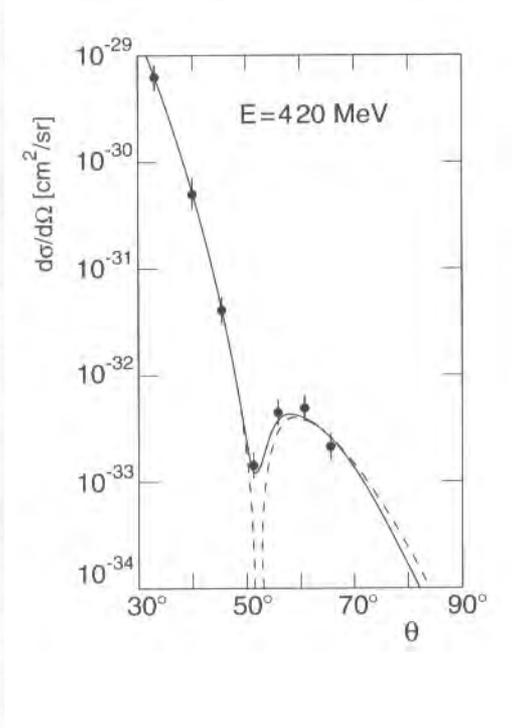


Abb. 2.8: Messung des Formfaktor  $^{12}\text{C}$  durch Elektronenstreuung. Gezeigt ist der differentielle Wirkungsquerschnitt, der bei einer festen Strahlenergie von 420 MeV unter 7 verschiedenen Streuwinkeln gemessen wurde. Die gestrichelte Kurve entspricht dem Verlauf, der sich ergibt, wenn eine ebene Welle an einer homogenen Kugel mit diffusem Rand gestreut wird (Born'sche Näherung); die durchgezogene Kurve entspricht einer exakten Streuphasenanalyse, die an die Messdaten angepasst wurde.

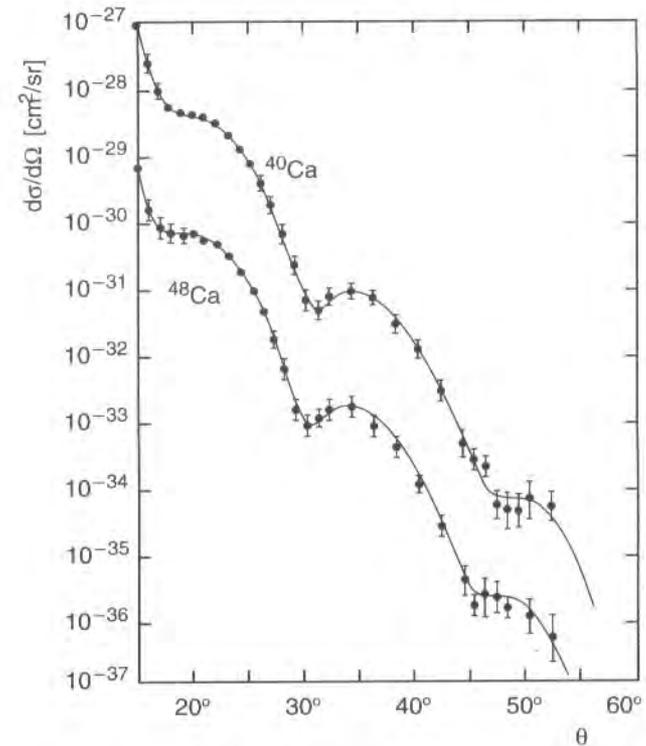


Abb. 2.9: Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Elektronen an den Kalziumisotopen  $^{40}\text{Ca}$  und  $^{48}\text{Ca}$ . Zur besseren Darstellung wurde der Wirkungsquerschnitt für  $^{40}\text{Ca}$  und  $^{48}\text{Ca}$  mit 10 bzw.  $10^{-1}$  multipliziert. Die durchgezogenen Linien entsprechen Ladungsverteilungen, die man an die Daten angepasst hat. Aus der Lage der Minima kann man sehen, dass der Radius von  $^{48}\text{Ca}$  größer ist als der von  $^{40}\text{Ca}$ .

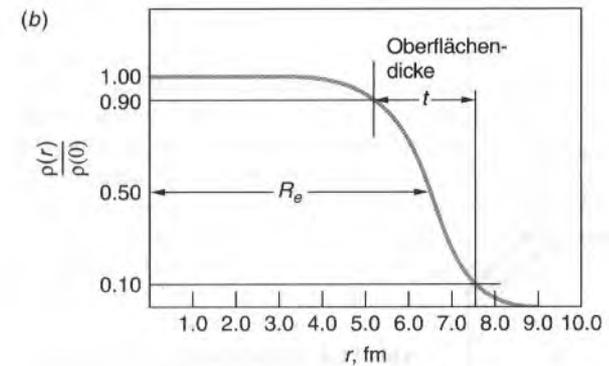
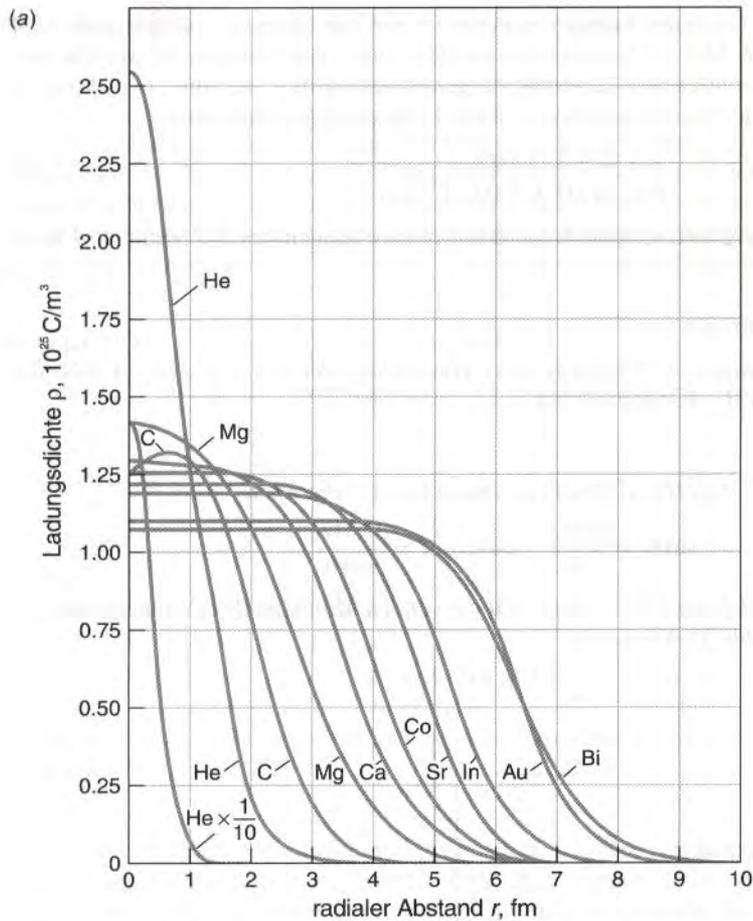


Abb. 2.10: (a) Ladungsverteilung verschiedener Kerne aus Streuexperimenten mit schnellen Elektronen. (b) Definitionen der Parameter  $R$  und  $t$ , die zur Beschreibung der Kernladungsdichte verwendet werden. Die Oberflächendicke  $t$  wird zwischen 10 und 90 Prozent der Ladungsdichte in der Mitte des Kerns gemessen. (Aus R. Hofstadter, *Annual Review of Nuclear Science* 7, 231 (1957).)

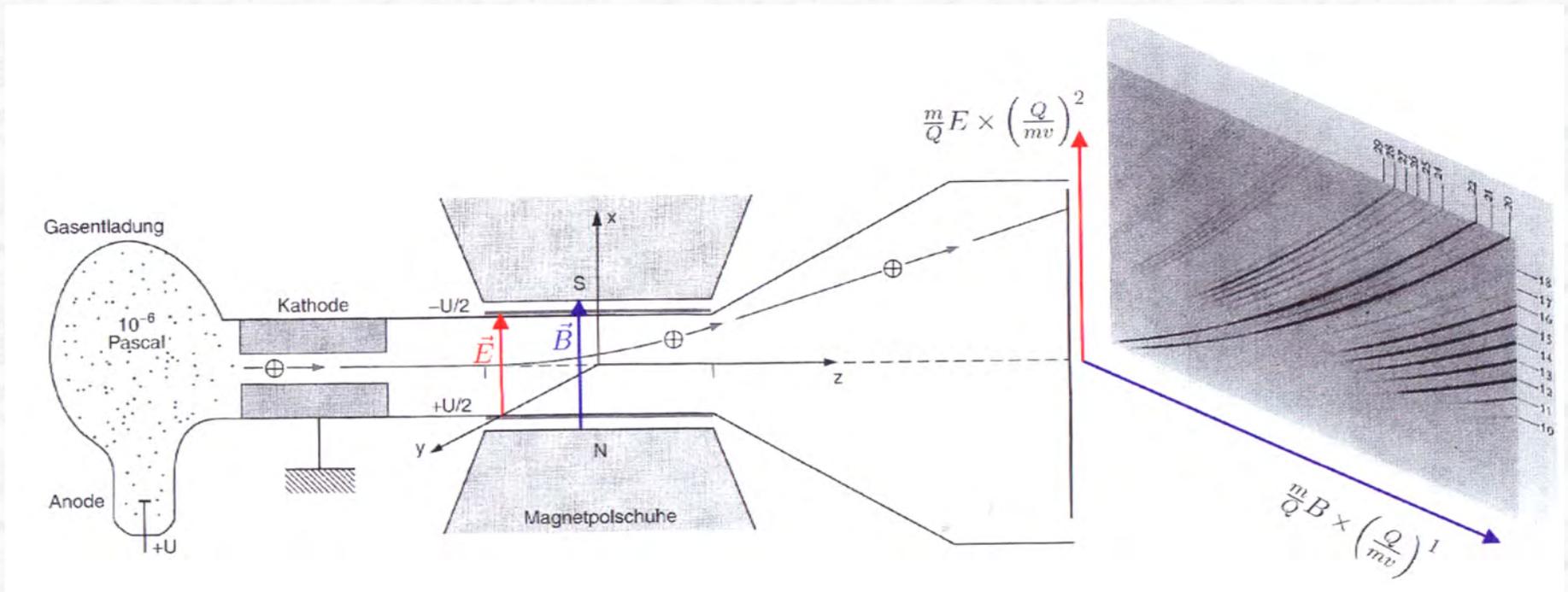


Abb. 2.11: Parabel-Massenspektrograph. Die Ionen treten mit sehr unterschiedlichen Geschwindigkeiten in die Ablenkkelder ein. E- und B-Feld sind zueinander parallel und lenken die Ionen nach oben bzw. nach rechts ab. Auf dem Schirm / Photoplatte treffen Teilchen verschiedener Geschwindigkeit  $v$  längs einer durch  $Q/m$  bestimmten Parabel auf. An jeder Parabel ist die Massenzahl  $A$  (10 – 29) angegeben. Die beiden intensivsten Parabeln gehören zu den beiden Neon-Isotopen mit  $A=20$  und  $A=22$ . (aus Ref. [3])

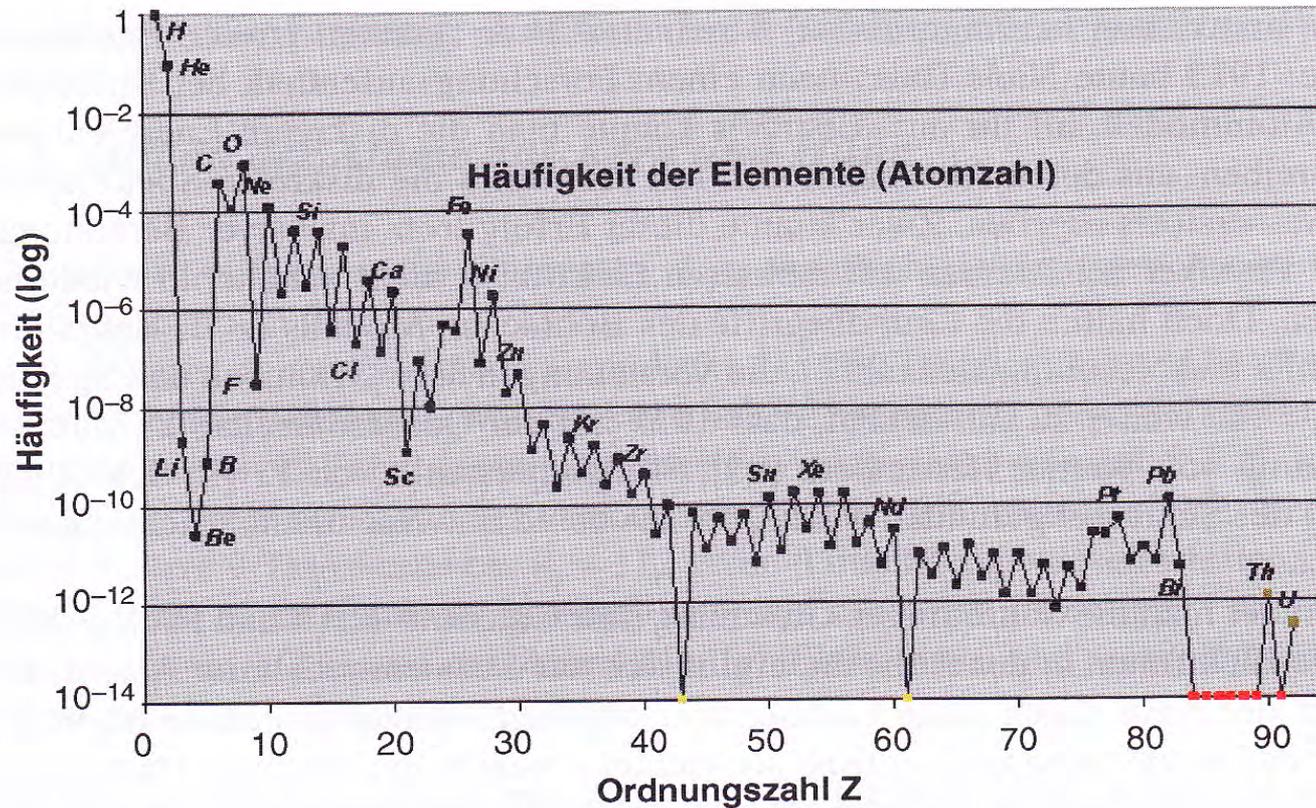


Abb. 2.12: Häufigkeit der Elemente relativ zu Wasserstoff im Sonnensystem.

Schwarz: stabile Elemente,

Farbig: instabile Elemente, Braun: die beiden Mutterelemente der natürlichen Radioaktivität

Rot: deren Zerfallsreihen

Ocker: die beiden künstlich hergestellten Elemente Technetium (Z=43) und Promethium (Z=61)

(aus Ref. [3])

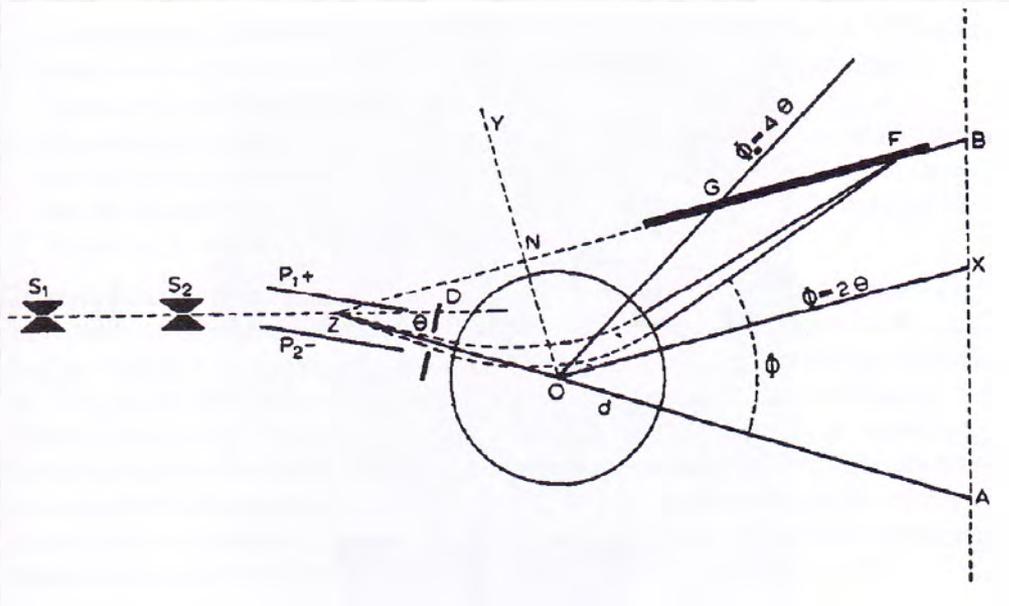


Abb. 2.13: Winkelfokussierendes Massenspektrometer (Aston 1919). Die Ionen fliegen von links durch einen Plattenkondensator. Dabei werden die langsameren Ionen stärker abgelenkt und haben einen kürzeren Weg durch das sich anschließende Magnetfeld (kreisförmig), wodurch die Auffächerung korrigiert wird. (aus Ref. [3])

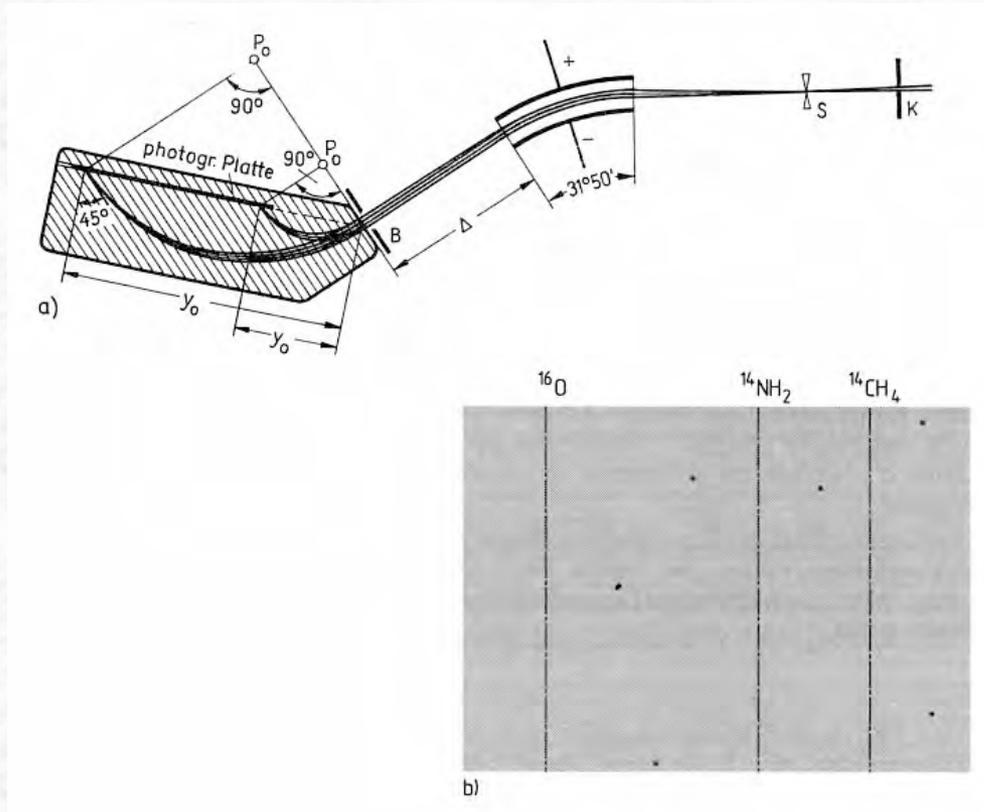


Abb. 2.14:

- a) Feldanordnung des Mattauchschen Massenspektrographen
- b) Drei mit diesem Instrument aufgenommene Linien zur Massenzahl 16

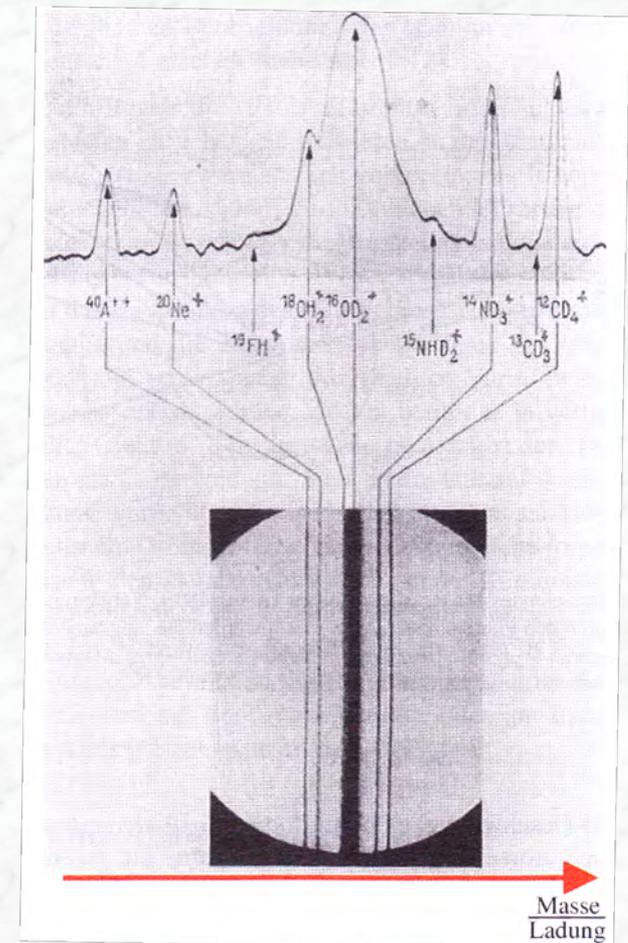


Abb. 2.15: Ein typisches Massenspektrum hoher Auflösung des doppelt fokussierenden Massenspektrometers von Mattauch. Die aus der Schwärzung der Photoplatte gewonnenen Intensitäten sind oben dargestellt. Verschiedene einfach ionisierte Moleküle mit  $A=20$  zeigen Massenunterschiede im Bereich von  $10^{-5}$ . (aus Ref. [3])

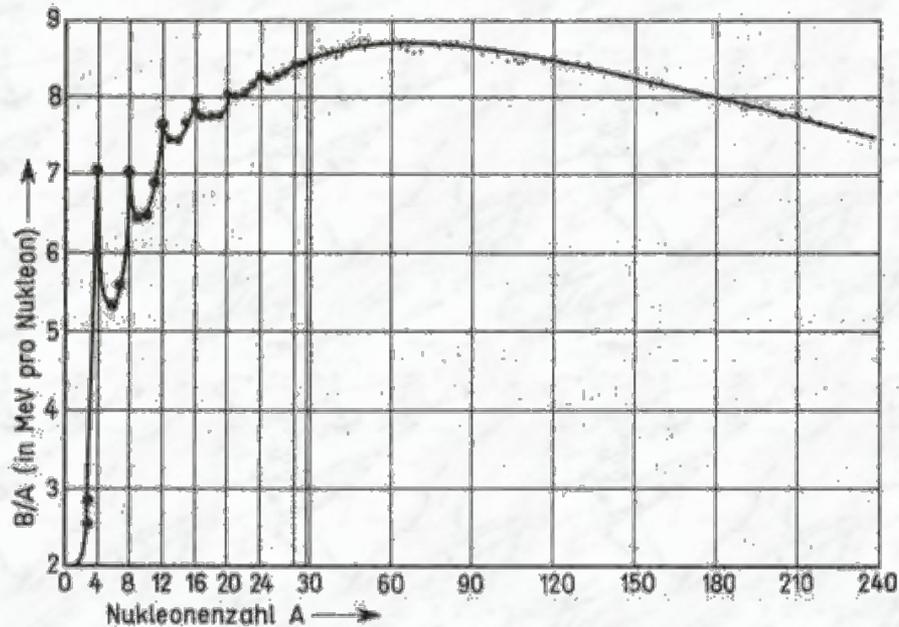
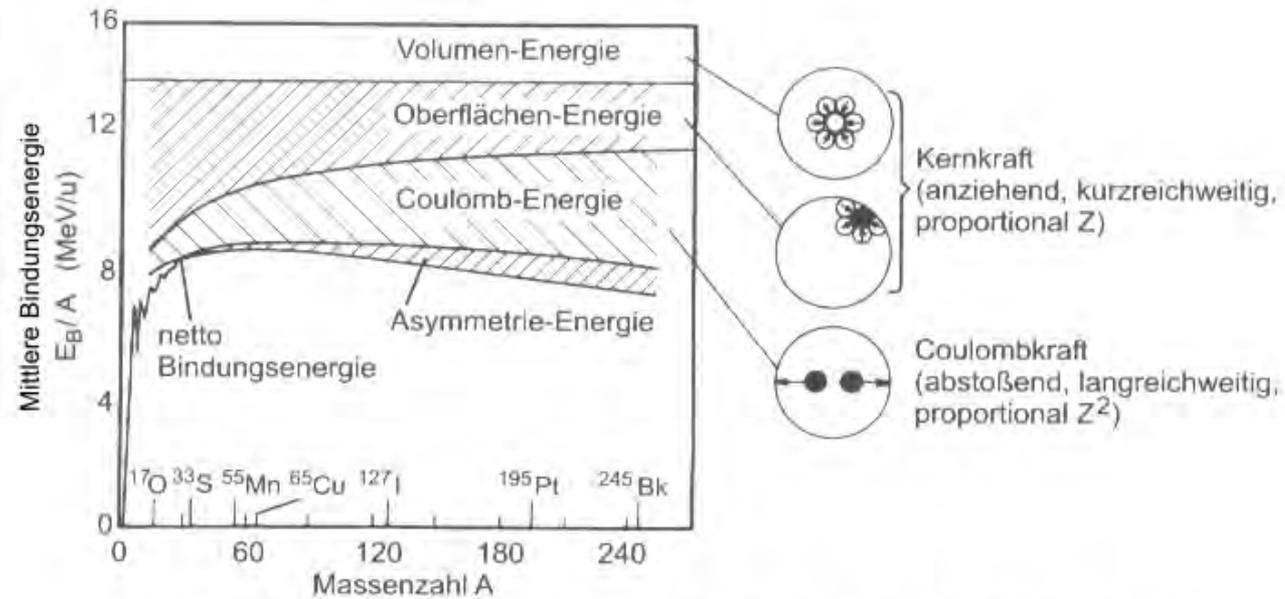


Abb. 2.16: Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion von A für stabile Kerne;  
Abszisse bis A = 30 gespreizt

Bindungsenergie pro Nukleon für die leichtesten Kerne.

Kern	${}^2_1\text{H}_1$ (d)	${}^3_1\text{H}_2$ (t)	${}^3_2\text{He}_1$	${}^4_2\text{He}_2$ ( $\alpha$ )	${}^6_3\text{Li}_3$	${}^7_3\text{Li}_4$	${}^8_4\text{Be}_4$ ( $\rightarrow 2\alpha$ )	${}^9_4\text{Be}_5$	${}^{10}_5\text{B}_5$	${}^{11}_5\text{B}_6$	${}^{12}_6\text{C}_6$
B	2,225	8,482	7,718	28,29	31,99	39,24	56,49	58,16	64,75	76,20	92,16
B/A	1,11	2,83	2,57	7,07	5,33	5,60	7,06	6,46	6,47	6,93	7,67
$S_n$	2,22	6,25	—	20,6	5,66	7,25	18,9	1,67	8,44	11,4	18,7
$S_p$	2,22	—	5,49	19,8	4,65	9,98	17,2	16,9	6,59	11,2	15,9

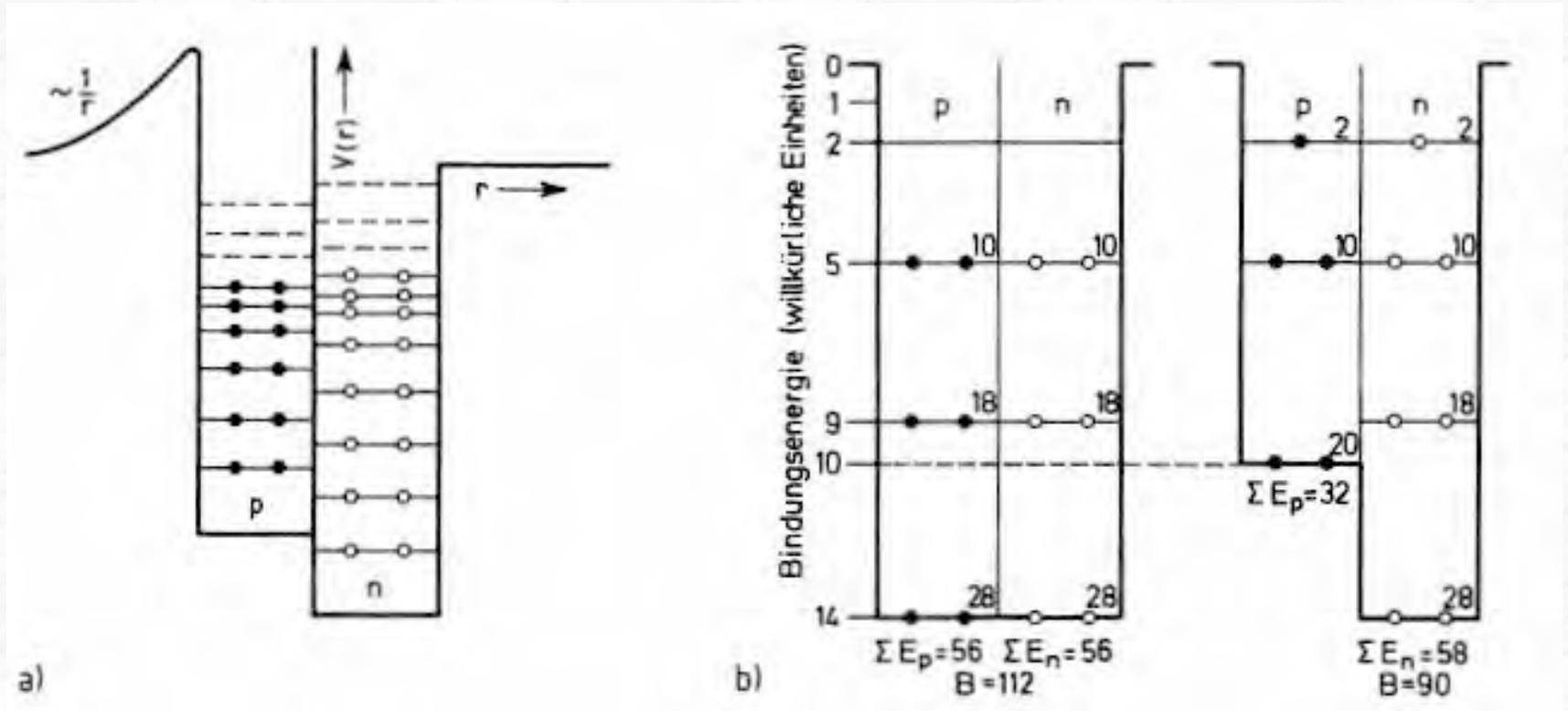
Tabelle 2:  $S_n$ ,  $S_p$  = Separationsenergien für Neutronen und Protonen

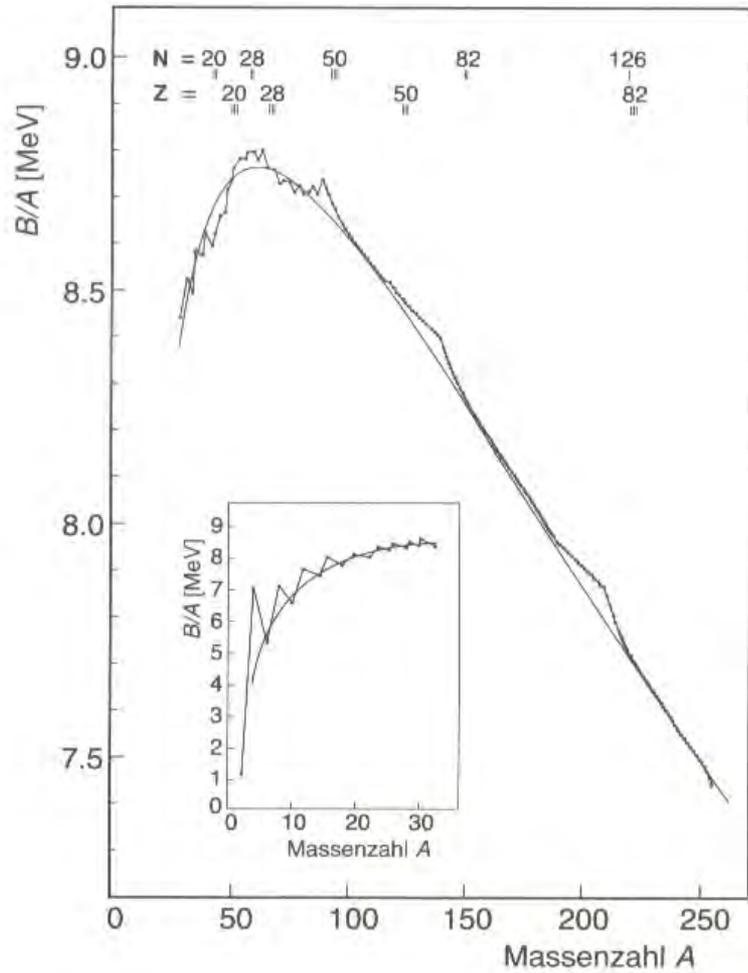


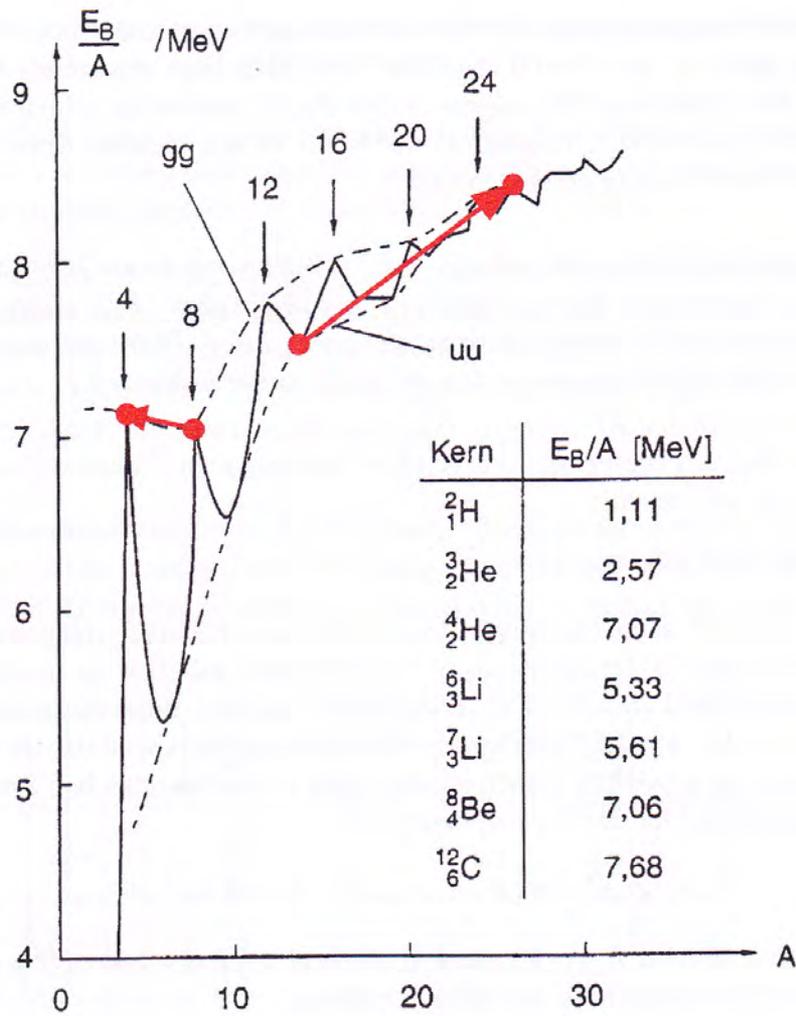
Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Massenzahl

Abb. 2.17

Abb. 2.18







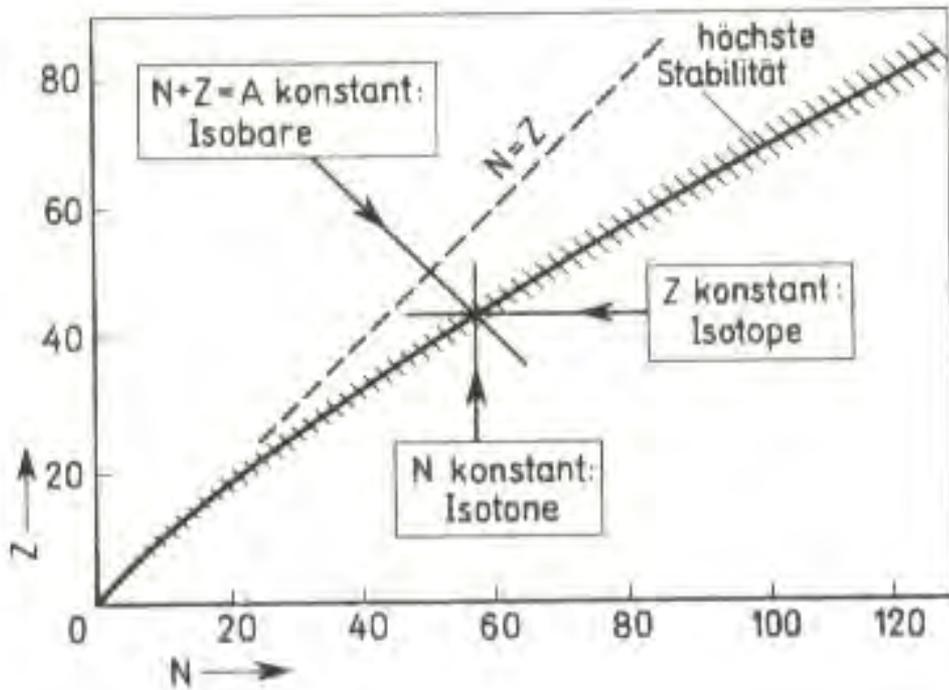
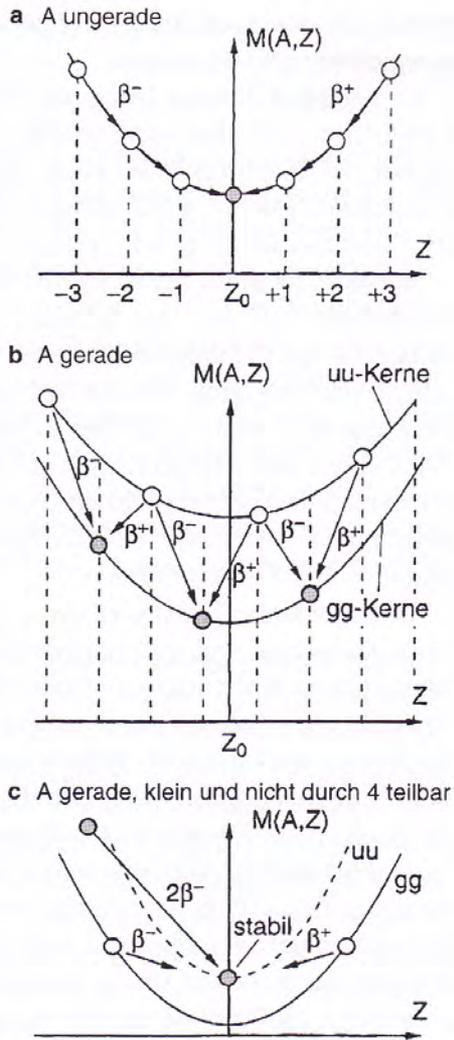


Abb. 2.19



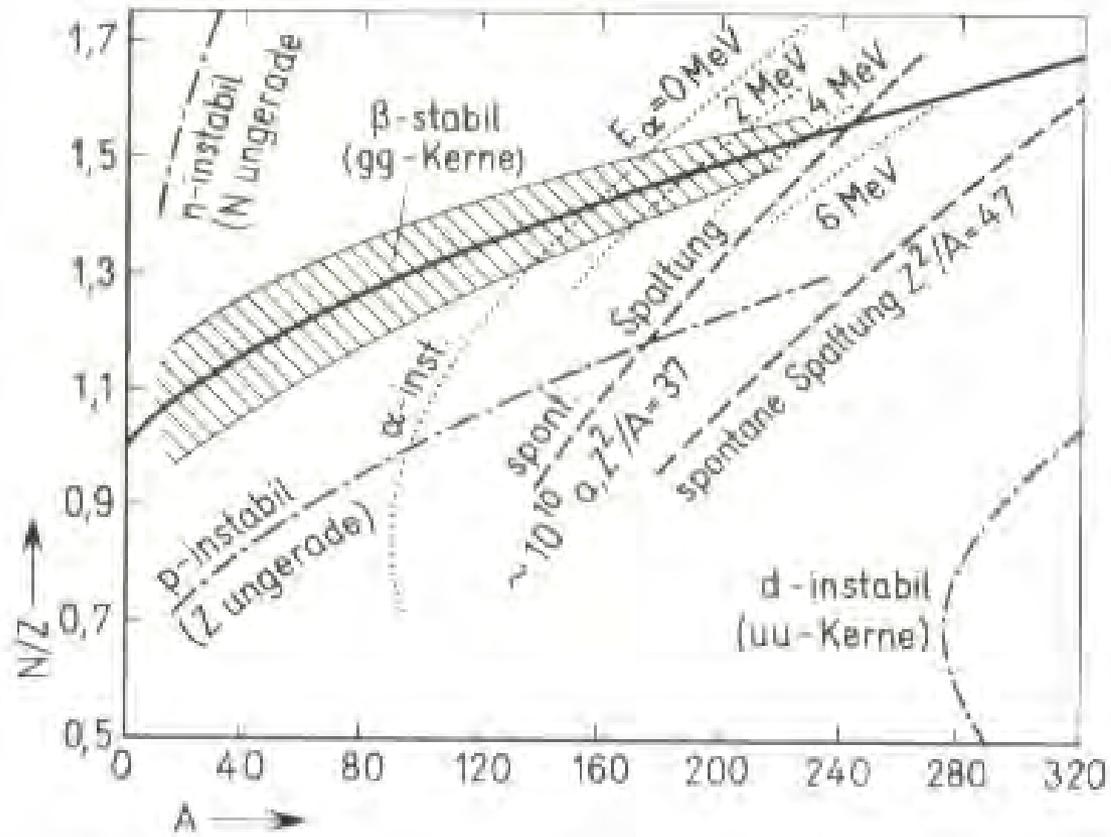


Abb. 2.20