Übungen zu Experimentalphysik V WS 2014/2015
Prof. Dr. Karl Jakobs, Dr. Karsten Köneke
Übungsblatt Nr. 14

Die Lösungen müssen bis 10:10 Uhr am Dienstag den 10.2.2015 in den Briefkasten 1 im Erdgeschoss des Gustav-Mie-Hauses eingeworfen werden!

Bitte geben sie die Übungsgruppennummer auf Ihren Lösungen an.

---

1. **Laufende Kopplungskonstanten**

   Kopplungskonstanten sind keine Konstanten. Sie hängen von der Energie des betrachteten Prozesses ab.

   In dieser Aufgabe werden die laufenden Kopplungen der Quantenelektrodynamik (QED) ($\alpha(q^2)$) und Quantenchromodynamik (QCD) ($\alpha_s(q^2)$) betrachtet.

   a) Für eine Abschätzung von $\alpha(q^2)$ in erster Ordnung müssen nun Schleifen aller Fermionen (Quarks und Leptonen) mit der entsprechenden Kopplung an das Photon berücksichtigt werden. Nutzen Sie den Ausdruck für α in der Form

   $$\alpha(q^2)^{-1} = \alpha(M_Z^2)^{-1}\left[1 - K\frac{\alpha(M_Z^2)}{3\pi}\ln(\frac{q^2}{M_Z^2})\right],$$

   um dies zu erreichen. Hier ist K die Quadratsumme der elektrischen Ladungen (normiert auf $|e|$) aller Fermionen. Welchen Wert müsste K in diesem Ausdruck haben, wenn man alle bekannten Fermionen berücksichtigt. Vernachlässigen Sie dabei, dass Schleifen mit schweren Teilchen schwächer beitragen. **[1 Punkt]**

   b) Das Laufen der Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung $\alpha_s(q^2)$ wird durch

   $$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(M_Z^2)}{1 + \frac{\alpha_s(M_Z^2)}{12\pi}(11n_c - 2n_f)\ln\left(\frac{q^2}{M_Z^2}\right)}$$

   beschrieben (berechnet in erster Schleifenordnung). Hierbei ist n_c die Anzahl der Farben, n_f die Anzahl der Quarkflavours, $M_Z = 91\,\mathrm{GeV}$ die Masse des Z-Boson, und $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1184$. Man beachte, dass hier das Vorzeichen im Nenner vor $\ln\left(\frac{q^2}{M_Z^2}\right)$ ein anderes ist als bei QED. Dies bedeutet, dass die Kopplungsstärke der QCD bei hohen Energien abnimmt (und bei niedrigen Energien zunimmt: "asymptotische Freiheit"). Für diese bahnbrechende Berechnung, die Berechnung der sogenannten β-Funktion, erhielten Frank Wilczek, David Politzer, und David Gross 2004 den Nobelpreis für Physik.

   Bei welchem Wert für q haben beide Kopplungen die gleiche Stärke ($\alpha(M_Z^2) = 1/128$)? Stellen Sie Ihren modifizierten Ausdruck für α aus Aufgabenteil a) und α_s graphisch dar. Hierfür bietet es sich auch an, den Kehrwert der beiden Kopplungskonstanten gegen eine logarithmische Abzisse aufzutragen. **[2 Punkte]**

   Wenn man die Kopplungsstärke der schwachen Wechselwirkung in der gleichen Graphik aufträgt, könnte man hoffen, dass sich alle drei in einem Punkt treffen. Dies ist allerdings im Standardmodell der Teilchenphysik nicht gegeben. Allerdings wird dies in gewissen, bisher experimentell nicht bestätigten, Erweiterungen zum Standardmodell erreicht, z.B. in sogenannten supersymmetrischen Modellen.

2. $\alpha_\mathbf{s}$ **und** Λ_{QCD}

Wenn $\alpha_s(\mu_R^2)$ bei einer Referenzenergie μ_R^2 bekannt ist, dann lässt sich $\alpha_s(\mu^2)$ bei einer anderen Energieskala μ^2 berechnen. Dies setzt voraus, dass μ_R ausreichend groß ist, so dass $\alpha_s(\mu_R^2) < 1$ ist. Um die Änderung der Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung mit der Energie zu bestimmen, berechnet in erster Schleifenordnung, gilt die Formel

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu_R^2)(33-2n_f)}{12\pi}\ln(\frac{\mu^2}{\mu_R^2})},$$

wobei n_f die Anzahl der bei der Skala μ relevanten Flavours ist. Üblicherweise verwendet man $\mu_R^2 = M_Z^2$. Eine andere Vorgehensweise ist ebenfalls gebräuchlich und soll im folgenden betrachtet werden.

a) Bestimmen Sie die Energie Λ, bei der α_s unendlich groß wird und divergiert. Geben Sie einen Ausdruck für $\ln(\Lambda^2/\mu_R^2)$ an. Leiten Sie daraus einen Ausdruck für $\alpha_s(\mu_R^2; \Lambda)$ ab. **[2 Punkte]**

   Diese Vorgehensweise wird dimensionale Transmutation genannt: aus einer dimensionslosen Konstante (α_s) kann man eine Konstante mit der Dimension der Energie herleiten (Λ_{QCD}), welche auch die Stärke der Interaktion beschreibt.

a) Geben Sie die numerischen Werte für Λ unter Verwendung von $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1184$ und für $n_f = 3$, 4 und 5 an.

   Bemerkung: Dieses Vorgehen ist eine Näherung. Eigentlich müsste man von M_Z aus schrittweise vorgehen und bis ca. 10 GeV $n_f = 5$, dann bis etwa 3 GeV $n_f = 4$ und anschließend $n_f = 3$ verwenden. **[2 Punkte]**

Da die folgende Aufgabe auf den Vorlesungen vom 10.2. und 11.2.2015 aufbaut, können Sie dieser Teil am 13.2.2015 direkt bei Ihren Übungsgruppenleitenden abgeben. Diese Aufgabe wird nur als zusätzliche Bonusaufgabe gewertet.

3. **Anzahl leichter, aktiver Neutrinos**

Der "Large-Electron-Positron Collider" (LEP) am CERN erlaubte es Z^0-Bosonen bei einer Schwerpunktenergie von ca. 91 GeV zu erzeugen, welche anschließend in ein Fermion-Antifermion-Paar zerfallen: $e^+e^- \to Z^0 \to f\bar{f}$.

Die OPAL-Kollaboration hat folgende Werte experimentell bestimmt: $\sigma_{\text{had}}^{\text{pole}} = 41,45 \pm 0,31\,\text{nb}$, $\Gamma_{\text{had}} = 1738 \pm 12\,\text{MeV}$, $\Gamma_{\text{lep}} = 83,27 \pm 0,50\,\text{MeV}$ und $m_Z = 91,181 \pm 0,009\,\text{GeV}$. Hierbei sind in Γ_{had} alle Quarks enthalten in welche das Z^0-Boson zerfallen kann und Γ_{lep} ist die Zerfallsbreite in individuelle geladene Leptonpaare, z.B. ein Elektron-Positron-Paar. Mit diesen Daten konnte die OPAL-Kollaboration die Anzahl der Neutrino-Generationen bestimmen, welche an das Z^0-Boson koppeln und höchstens die Hälfte der Z^0-Boson Masse besitzen.

a) Leiten Sie eine Formel für die Anzahl der Neutrinos N_ν her und bestimmen Sie hiermit N_ν. Nutzen Sie hierfür die Tatsache, dass $\Gamma_{\text{lep}}/\Gamma_\nu = 1/2$ ist. **[2 Punkte]**

b) Bestimmen Sie mit den Methoden der Fehlerfortpflanzung die Unsicherheit auf N_ν aus den oben angegebenen experimentellen Unsicherheiten. **[2 Punkte]**