

7. Symmetrien und Erhaltungssätze

7.1 Symmetrien und Gruppen, Einleitung, $SO(3)$, $SU(2)$

7.2 Parität, Symmetrie unter räumlicher Spiegelung

7.3 Ladungskonjugation

7.4 Physik der neutralen Kaonen, CP-Verletzung

7.5 Teilchen-Antiteilchen-Oszillationen

7 Symmetrien und Erhaltungssätze

7.1. Symmetrien und Gruppen, Einleitung

Experimentelle Beobachtung:

Auftreten von Erhaltungssätzen (Energie, Impuls, Drehimpuls, Ladung, Leptonzahl,)

Theorie: Für jede einem physikalischen System zugrunde liegende Symmetrie kann man Eine erhaltene *“Ladung”* (Quantenzahl) definieren.

Emmy Noether (1917): Jede Symmetrie in der Natur zieht einen Erhaltungssatz nach sich (und umgekehrt)



Symmetrie: Operation wird auf ein System angewandt;
System bleibt invariant, d.h. transformierter Zustand ist vom untransformierten nicht zu unterscheiden

Mathematische Beschreibung durch Gruppentheorie

Die auf ein System anwendbare Menge aller Symmetrieoperationen bildet eine mathematische Gruppe, d.h. sie hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Abgeschlossenheit: $\left. \begin{array}{l} R_i \in G \\ R_j \in G \end{array} \right\} \Rightarrow R_i R_j = R_k \in G$

(ii) Einselement: $\exists I \in G$, so dass $I \cdot R_i = R_i \cdot I = R_i \quad \forall R_i$

(iii) Inverses Element: $\forall R_i$ gibt es Element R_i^{-1} , so dass $R_i \cdot R_i^{-1} = R_i^{-1} \cdot R_i = I$

(iv) Assoziativität: $(R_i R_j) R_k = R_i (R_j R_k)$

Gruppenelemente im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h. $R_i R_j \neq R_j R_i$

Wenn alle Elemente kommutieren \rightarrow Abelsche Gruppe

Beispiele: Räumliche und zeitliche Translationen: abelsch
Rotationen : nicht abelsch

Kontinuierliche Gruppen:

Gruppenelemente hängen von einem oder mehreren kontinuierlichen Parametern ab (z.B. Rotationswinkel) \leftrightarrow Additive Quantenzahlen

Diskrete Gruppen:

Elemente können durch (ganzzahligen) Index gekennzeichnet werden (alle endlichen Gruppen sind diskret) \leftrightarrow Multiplikative Quantenzahlen

Physikalisch relevante Gruppen:

Matrizengruppen

Beispiele:

Die Menge aller unitären $n \times n$ Matrizen bilden eine Gruppe: $U(n)$

Wichtiger Spezialfall: Unitäre Matrizen mit Determinante = 1: $SU(n)$

Reelle unitäre (also orthogonale) Matrizen: $O(n)$

Mit Determinante = 1: $SO(n)$

Konkrete Beispiele:

$SO(3)$: Rotationen im 3-dimensionalen Raum (verknüpft mit Drehimpulserhaltung)

$SU(2)$, $SU(3)$: Wichtige *innere Symmetrien* der Elementarteilchenphysik (mehr später):

Standardmodell der Elementarteilchen basiert auf Symmetrie unter

$$SU(3) \times SU_L(2) \times U(1)$$

QCD Elektroschwach

Beispiele für diskrete Gruppen:

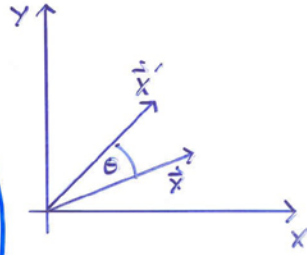
Paritätsoperation	P
Teilchen-Antiteilchen-Konjugation	C
Deren Kombination	CP

Beispiel: Drehungen in drei Dimensionen

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$$

Drehung um Winkel θ_3 um die z-Achse

$$\theta_3 \rightarrow R^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



ebenso:

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad R^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

Alle Drehmatrizen erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\boxed{R^{-1} = R^T} \quad \rightarrow \quad \det R = \pm 1$$

Drehgruppe $SO(3)$: Gruppe der speziellen (mit $\det R = +1$) orthogonalen Matrizen in 3 dim.

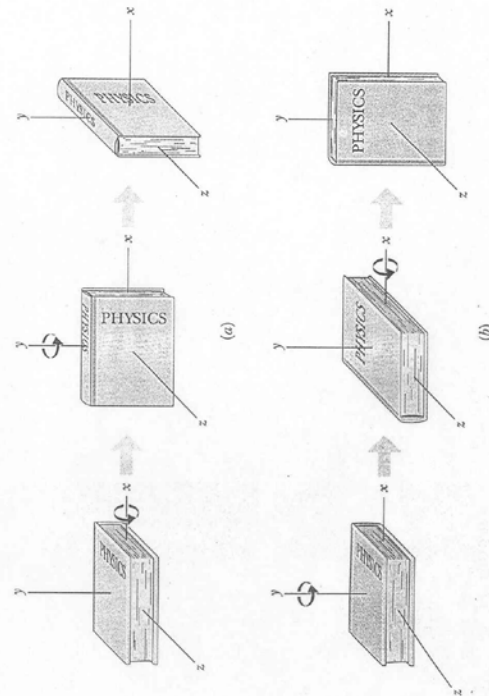
$SO(3)$ ist nicht kommutativ! \rightarrow Beispiel

\rightarrow zugehörige Gruppe wird als "Nicht-abelsche Gruppe" bezeichnet

$SO(3)$ hängt von drei kontinuierlichen Parametern ab (z.B. 3 Euler'sche Winkel)

Gruppen, die von endlich vielen kontinuierl. Parametern abhängen heißen **LIE-Gruppen**

FIGURE 11-6 (a) From its initial position on the left, the book is given two successive 90° rotations, first about the (horizontal) x axis and then about the (vertical) y axis. (b) The book is given the same rotations, but in the reverse order. If angular displacement were truly a vector quantity, the order of these displacements would not matter. It clearly does matter, so (large) angular displacements are not vector quantities, even though we can assign magnitude and direction to them.



Betrachte infinitesimale Drehungen

$$R^{(3)}(d\theta) = 1 - i \cdot d\theta \cdot D_3$$

↓ Kleinwinkelnäherung

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

analog: D_1 und D_2

D_1, D_2, D_3 heißen **Generatoren** der Gruppe

Drehung um bel. Achse \vec{n}

$$R^n(d\theta) = 1 - i d\theta \cdot n_i D_i = 1 - i d\theta \cdot \vec{n} \cdot \vec{D}$$

Hintereinander ausführung von m infin. Drehungen

$$R^n(m \cdot d\theta) = (1 - i d\theta \vec{n} \cdot \vec{D})^m$$

↳ $R^n(\theta) = e^{-i\theta \vec{n} \cdot \vec{D}}$

$$e^A := Id + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

$A = \text{Matrix}$

nicht Abelsche Gruppe:

↳ D_i vertauschen nicht

$$[D_i, D_j] = i \cdot \epsilon_{ijk} D_k$$

Darstellungen der Drehgruppe: Gesamtheit der orth. Matrizen bildet eine Darstellung von $SO(3)$

Die Symmetriegruppe $SU(2)$

Zur Erinnerung: Invarianz unter Rotationen

$$|\Psi\rangle \rightarrow U|\Psi\rangle = (1 - i\varepsilon J_3) \cdot |\Psi\rangle$$

U = unitärer Operator

ε = infinitesimaler Drehwinkel

Drehung um **endlichen Winkel θ** : Aufeinanderfolge von n infinitesimalen Rotationen:

$$U(\theta) = (1 - i \frac{\theta}{n} J_3)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{e^{i\theta J_3}}$$

J_i : **Generatoren** der Rotationsgruppe

Kommutator-Relationen: $[J_i, J_k] = i \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot J_l$

z.B. $[J_1, J_2] = i \cdot J_3$

Casimir Operator $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle$$

$$J_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle$$

Auf-/Abstiegs-Operatoren:

$$\boxed{J_{\pm} = J_1 \pm i \cdot J_2}$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j+1)j - m(m\pm 1)} |j, m\pm 1\rangle$$

Basisvektoren $|j, m\rangle$

Spannen den Darstellungsraum auf

Dimension d der Darstellung: $d = 2j + 1$

wobei $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

(Multipletts)

Darstellung der Rotationsgruppe für $(j = \frac{1}{2})$: SU(2)

Generatoren: $J_i = \frac{1}{2} \sigma_i$

σ_i : Pauli Matrizen: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Basis Vektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Spin \uparrow Spin \downarrow

$\sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Transformationsmatrizen: $U(\theta_i) = e^{-i \theta_i \frac{\sigma_i}{2}}$
($\hat{=}$ Rotation um Achse i)

beliebige Achse: $\vec{\theta}$ $U(\vec{\theta}) = e^{-i \vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$

$e^A := Id + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$

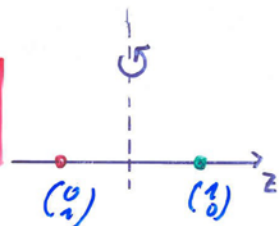
 $A = \text{Matrix}$

$U(\theta)$ bilden eine Gruppe } \rightarrow SU(2)
Determinante = 1

$\det(e^{iA}) = e^{i \text{Tr}(A)} = 1$

Rotationen um Y-Achse:

$$U(\theta_2) = e^{-i\theta_2 \frac{\sigma_2}{2}} = \cos \frac{\theta_2}{2} - i \sigma_2 \cdot \sin \frac{\theta_2}{2}$$



beachte: $\sigma_2^2 = \text{Id}$
 $\sigma_2^3 = \sigma_2$

$$\theta_2 = 180^\circ \rightarrow U(\theta_2) = -i \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} U(\theta_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ U(\theta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\theta_2 = 360^\circ \rightarrow U(\theta_2) = -\text{Id}$$

d.h.: Spinor ändert VZ unter Rotation

wichtiger Unterschied zwischen
 $SO(3)$ und $SU(2)$.

Spinordarstellungen der $SU(2)$ sind
keine Darstellungen der Rotationsgruppe.

Darstellungen können auf höhere Spins verallgemeinert werden

$$\text{Spin } -1: \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Generatoren: 3×3 Matrizen $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$

Anwendung:

Teilchen $\rightarrow |j, m\rangle$

Systeme wechselwirkender Teilchen werden durch Produkte von Darstellungen beschrieben

$$|j_A, m_A\rangle \cdot |j_B, m_B\rangle$$

\hookrightarrow Drehimpulskopplung

Kopplung von Drehimpulsen:

\hookrightarrow Clebsch - Gordan - Koeffizienten

$$J_A, J_B \rightsquigarrow J = J_A \oplus J_B$$

$$J = |J_A - J_B|, |J_A - J_B| + 1, \dots, J_A + J_B$$

$$M = m_A + m_B$$

$$|JM\rangle = \sum_{m_A, m_B} C(m_A, m_B, JM) |j_A j_B m_A m_B\rangle$$

Beispiel: $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \rightarrow J=1$ Triplett
 $J=0$ Singulett

$$|s=1, m=1\rangle = \uparrow\uparrow$$

$$|s=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\}$$

$$|s=1, m=-1\rangle = \downarrow\downarrow$$

$$|s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\}$$

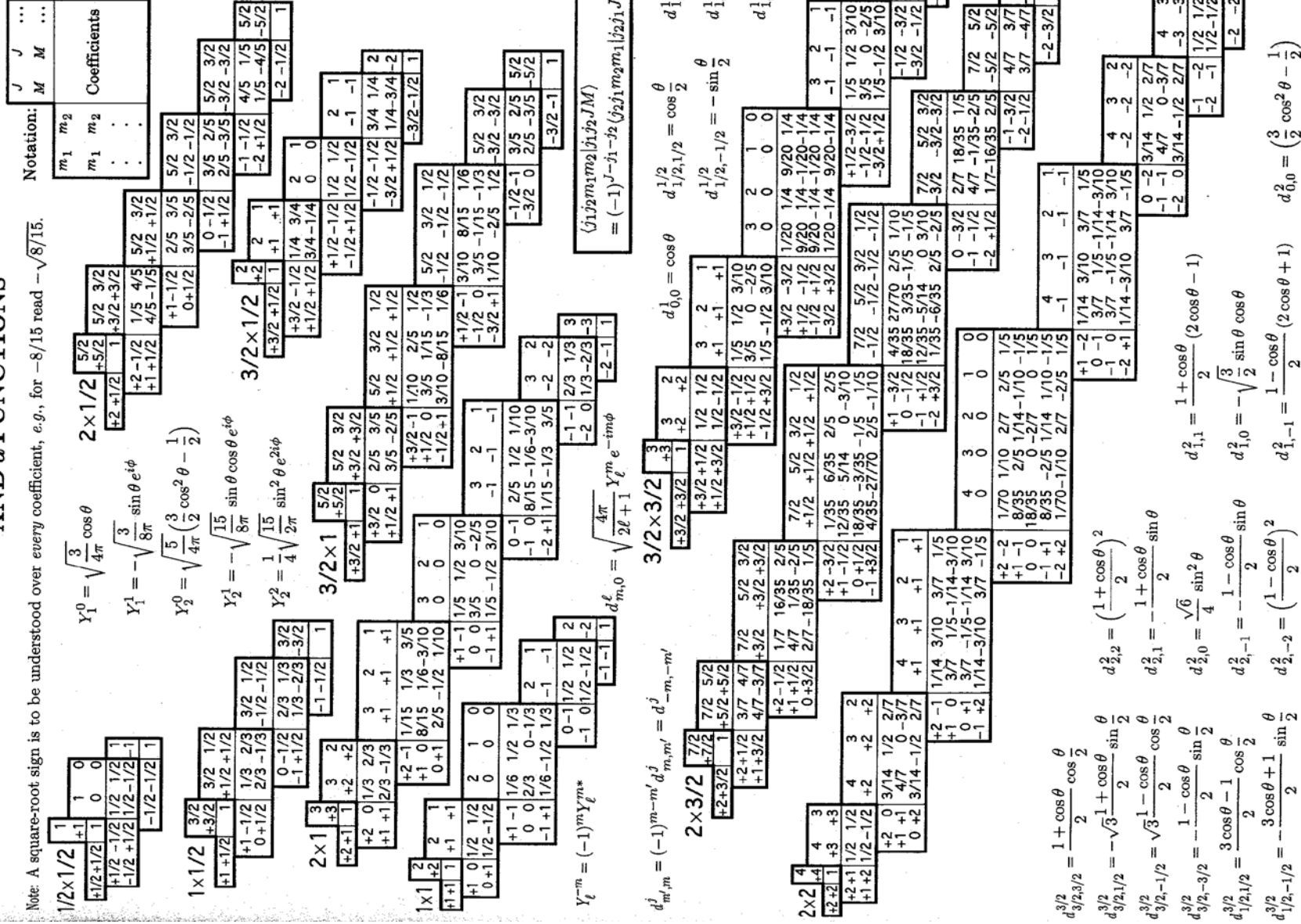
$$2 \otimes 2 \rightarrow 3 \oplus 1$$

$$\begin{aligned} (2 \otimes 2) \otimes 2 &\rightarrow (3 \oplus 1) \otimes 2 \\ &= (3 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2) \\ &= 4 \oplus 2 \oplus 2 \end{aligned}$$

Gesamt - Spin $\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e, g , for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.



35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	\dots
M	M	\dots
m_1	m_2	
m_1	m_2	Coefficients
\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	

$1/2 \times 1/2$	1		
+1/2 +1/2	1	1	0
+1/2 -1/2	1/2	1/2	1
-1/2 +1/2	1/2	-1/2	-1
-1/2 -1/2	1		

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$2 \times 1/2$	$5/2$		
+2 +1/2	$5/2$	$3/2$	
+2 -1/2	1	$3/2 + 3/2$	
+1 +1/2	$1/5$	$4/5$	$5/2$
-1 +1/2	$4/5 - 1/5$	$1/2 + 1/2$	$3/2$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$0 - 1/2$	$2/5$	$3/5$	$5/2$	$3/2$
$0 + 1/2$	$3/5$	$-2/5$	$-1/2$	$-1/2$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$0 - 1/2$	$3/5$	$2/5$	$5/2$	$3/2$
$-1 + 1/2$	$2/5 - 3/5$	$-3/2$	$-3/2$	$3/2$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$3/2 \times 1/2$	2		
+3/2 +1/2	2	1	
+3/2 -1/2	1	+1	+1
+1/2 +1/2	$1/4$	$3/4$	2
-1/2 +1/2	$3/4 - 1/4$	0	0

$-1 - 1/2$	$4/5$	$1/5$	$5/2$
$-2 + 1/2$	$1/5 - 4/5$	$-5/2$	
$-2 - 1/2$	1		

$1 \times 1/2$	$3/2$		
+1 +1/2	$3/2$	$1/2$	
+1 -1/2	$1/3$	$2/3$	$3/2$
$0 + 1/2$	$2/3 - 1/3$	$-1/2 - 1/2$	$1/2$
$0 - 1/2$	$2/3$	$1/3$	$3/2$
$-1 + 1/2$	$1/3 - 2/3$	$-3/2$	$3/2$

2×1	3		
+2 +1	3	2	
+2 0	$1/3$	$2/3$	3
+1 +1	$2/3 - 1/3$	+1	+1
+2 -1	$1/15$	$1/3$	$3/5$
+1 0	$8/15$	$1/6 - 3/10$	3
$0 + 1$	$2/5 - 1/2$	$1/10$	0

$3/2 \times 1$	$5/2$		
+3/2 +1	$5/2$	$3/2$	
+3/2 0	$2/5$	$3/5$	$5/2$
+1/2 +1	$3/5 - 2/5$	$1/2 + 1/2 + 1/2$	$3/2$
+3/2 -1	$1/10$	$2/5$	$1/2$
+1/2 0	$3/5$	$1/15 - 1/3$	$5/2$
-1/2 +1	$3/10 - 8/15$	$1/6$	$3/2$

$+1/2 - 1/2$	$1/2$	$1/2$	2	1
$-1/2 + 1/2$	$1/2 - 1/2$	-1	-1	-1
$-1/2 - 1/2$	$3/4$	$1/4$	2	1
$-3/2 + 1/2$	$1/4 - 3/4$	-2	-2	-2
$-3/2 - 1/2$	1			

1×1	2		
+1 +1	2	1	
+1 0	$1/2$	$1/2$	2
$0 + 1$	$1/2 - 1/2$	0	0
+1 -1	$1/5$	$1/2$	$3/10$
$0 0$	$3/5$	$0 - 2/5$	3
$-1 + 1$	$1/5 - 1/2$	$3/10$	0

$+1 - 1$	$1/5$	$1/2$	$3/10$
$0 0$	$3/5$	$0 - 2/5$	3
$-1 + 1$	$1/5 - 1/2$	$3/10$	-1
$0 - 1$	$2/5$	$1/2$	$1/10$
$-1 0$	$8/15 - 1/6 - 3/10$	3	2
$-2 + 1$	$1/15 - 1/3$	$3/5$	-2

$+1/2 - 1$	$3/10$	$8/15$	$1/6$
$-1/2 0$	$3/5 - 1/15 - 1/3$	$5/2$	$3/2$
$-3/2 + 1$	$1/10 - 2/5$	$1/2$	$-3/2$
$-1/2 - 1$	$3/5$	$2/5$	$5/2$
$-3/2 0$	$2/5 - 3/5$	$-5/2$	$-5/2$

$+1 - 1$	$1/6$	$1/2$	$1/3$
$0 0$	$2/3$	$0 - 1/3$	2
$-1 + 1$	$1/6 - 1/2$	$1/3$	-1
$0 - 1$	$1/2$	$1/2$	2
$-1 0$	$1/2 - 1/2$	-2	-2
$-1 - 1$	1		

$-1 - 1$	$2/3$	$1/3$	3
$-2 0$	$1/3 - 2/3$	-3	-3
$-2 - 1$	1		

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M \rangle$$

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

	J	J	...
	M	M	...
m_1	m_2	Coefficients	
m_1	m_2		
\vdots	\vdots		
\vdots	\vdots		

$$1/2 \times 1/2$$

	1		
+1	1	0	
+1/2+1/2	1	0	0
+1/2 -1/2	1/2	1/2	1
-1/2 +1/2	1/2	-1/2	-1
	-1/2	-1/2	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$2 \times 1/2$$

		5/2						
	+5/2	5/2	3/2					
+2	+1/2	1	+3/2+3/2					
+2	-1/2	1/5	4/5	5/2	3/2			
+1	+1/2	4/5	-1/5	+1/2	+1/2			
				+1-1/2	2/5	3/5	5/2	3/2

$$1 \times 1/2$$

		3/2				
	+3/2	3/2	1/2			
+1	+1/2	1	+1/2+1/2			
+1	-1/2	1/3	2/3	3/2	1/2	
0	+1/2	2/3	-1/3	-1/2	-1/2	
		0	-1/2	2/3	1/3	3/2
		-1	+1/2	1/3	-2/3	-3/2

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \rightarrow \downarrow = 0$ Singulett
 \uparrow Triplet
 $2 \otimes 2 \rightarrow 3 \oplus 1$
 J, M
 $|1, 1\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$

$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$

$$2 \times 1$$

		3				
	+3	3	2			
+2	+1	1	+2	+2		
+2	0	1/3	2/3	3	2	1
+1	+1	2/3	-1/3	+1	+1	+1

$$3/2$$

$$+3/2$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$1 \times 1$$

		2						
	+2	2	1					
+1	+1	1	+1					
+1	0	1/2	1/2	2	1	0		
0	+1	1/2	-1/2	0	0	0		
		+1	-1	1/6	1/2	1/3		
		0	0	2/3	0	-1/3	2	1
		-1	+1	1/6	-1/2	1/3	-1	-1

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

	0	-1	1/2	1/2	2
	-1	0	1/2	-1/2	-2
		-1	-1	1	

$$d_{m,0}^\ell$$

Kopplung zweier Spin 1 Teilchen:

$$1 \otimes 1 \rightarrow \downarrow = 0, 1, 2$$

Singulett Triplet Quintet

$$3 \otimes 3 \rightarrow 1 \oplus 3 \oplus 5$$

$$|2, 2\rangle = |1, 1, 1, 1\rangle$$

$$|2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |1, 1, 1, -1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} |1, 1, 0, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |1, 1, -1, 1\rangle$$

$1JM$

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	\dots	
M	M	\dots	
m_1	m_2		Coefficients
m_1	m_2		
\vdots	\vdots		
\vdots	\vdots		

$$1/2 \times 1/2$$

1				
+1	1	0		
+1/2+1/2	1	0	0	
+1/2	-1/2	1/2	1/2	1
-1/2	+1/2	1/2	-1/2	-1
-1/2	-1/2	1		

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$2 \times 1/2$$

5/2					
+5/2	5/2	3/2			
+2	+1/2	1	+3/2	+3/2	
+2	-1/2	1/5	4/5	5/2	3/2
+1	+1/2	4/5	-1/5	+1/2	+1/2

+1	-1/2	2/5	3/5	5/2	3/2
0	+1/2	3/5	-2/5	-1/2	-1/2

0	-1/2	3/5	2/5	5/2	3/2
-1	+1/2	2/5	-3/5	-3/2	-3/2

$$3/2 \times 1/2$$

2				
-1	-1/2	4/5	1/5	5/2

$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \rightarrow J=0$ Singulett
1 Triplet

$2 \otimes 2 \rightarrow 3 \oplus 1$
 $J, M \rightarrow J_1, J_2, m_1, m_2$
 $|1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$1 \times 1/2$$

3/2					
+3/2	3/2	1/2			
+1	+1/2	+1/2			
+1	-1/2	1/3	2/3	3/2	1/2
0	+1/2	2/3	-1/3	-1/2	-1/2

0	-1/2	2/3	1/3	3/2
-1	+1/2	1/3	-2/3	-3/2

$$2 \times 1$$

3			
+3	3	2	
+2	+1	-1/2	1

$$3/2 \times 1$$

5/2		
+5/2	5/2	
+3/2	+1	+3/2

+2	0	1/3	2/3	3	2	1
+1	+1	2/3	-1/3	+1	+1	+1

+3/2	0	2/5
+1/2	+1	3/5

$$1 \times 1$$

2							
+2	2	1					
+1	+1	+1					
+2	-1	1/15	1/3	3/5	+3		
+1	0	8/15	1/6	-3/10	3	2	1
0	+1	2/5	-1/2	1/10	0	0	0

+1	-1	1/5	1/2	3/10	+3	
0	0	3/5	0	-2/5	3	2
-1	+1	1/5	-1/2	3/10	-1	-1

+1	0	1/2	1/2	2	1	0
0	+1	1/2	-1/2	0	0	0

0	-1	2/5	1/2
-1	0	8/15	-1/6
-2	+1	1/15	-1/3

+1	-1	1/6	1/2	1/3	0	-1
0	0	2/3	0	-1/3	2	1
-1	+1	1/6	-1/2	1/3	-1	-1

0	-1	1/2	1/2	2
-1	0	1/2	-1/2	-2

$$d_{m,0}^{\ell} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell}^m e^{i\phi}$$

Kopplung zweier Spin 1 Teilchen:

$1 \otimes 1 \rightarrow J=0, 1, 2$
Singulett, Triplet, Quintet

$$3 \otimes 3 \rightarrow 1 \oplus 3 \oplus 5$$

$$|2, 2\rangle = |1, 1, 1, 1\rangle$$

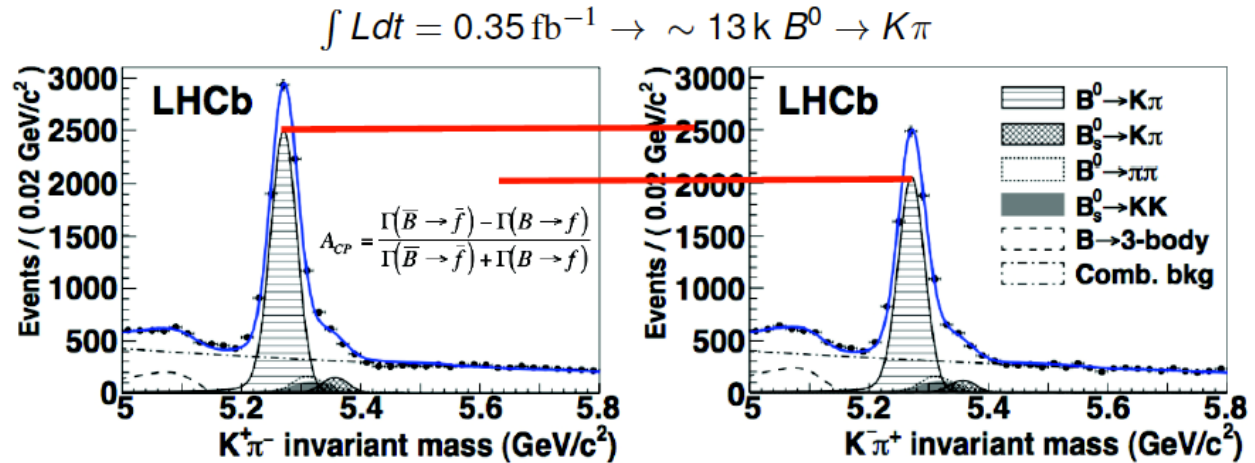
$$|2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |1, 1, 1, -1\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |1, 1, 0, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |1, 1, -1, 1\rangle$$

M)

CP violation in B decays

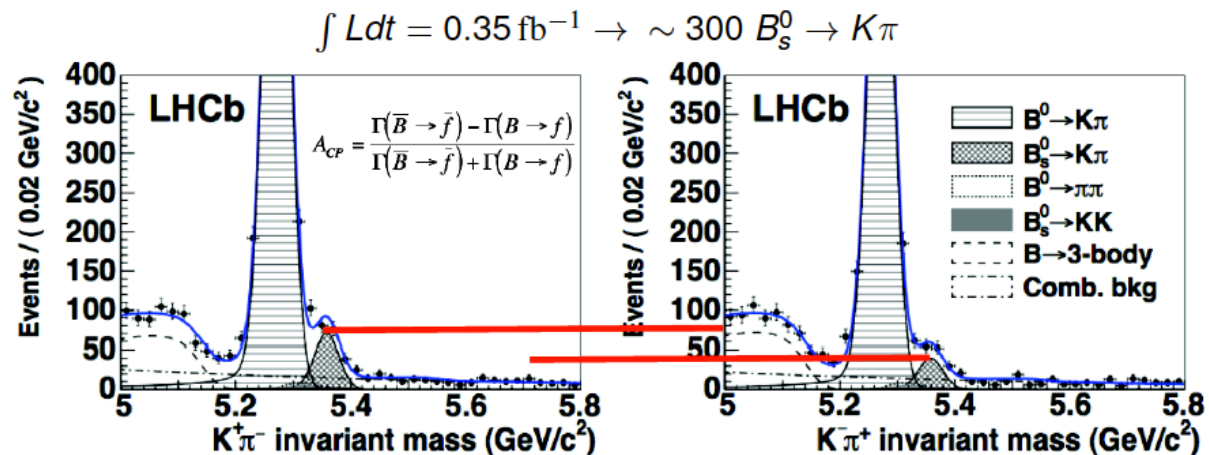


- $B_0^d \rightarrow K \pi$



$$A_{CP}(B^0 \rightarrow K \pi) = -0.088 \pm 0.011(\text{stat}) \pm 0.008(\text{syst})$$

- $B_0^s \rightarrow K \pi$



$$A_{CP}(B_s^0 \rightarrow K \pi) = 0.27 \pm 0.08(\text{stat}) \pm 0.02(\text{syst})$$

K^0 -Oszillationen

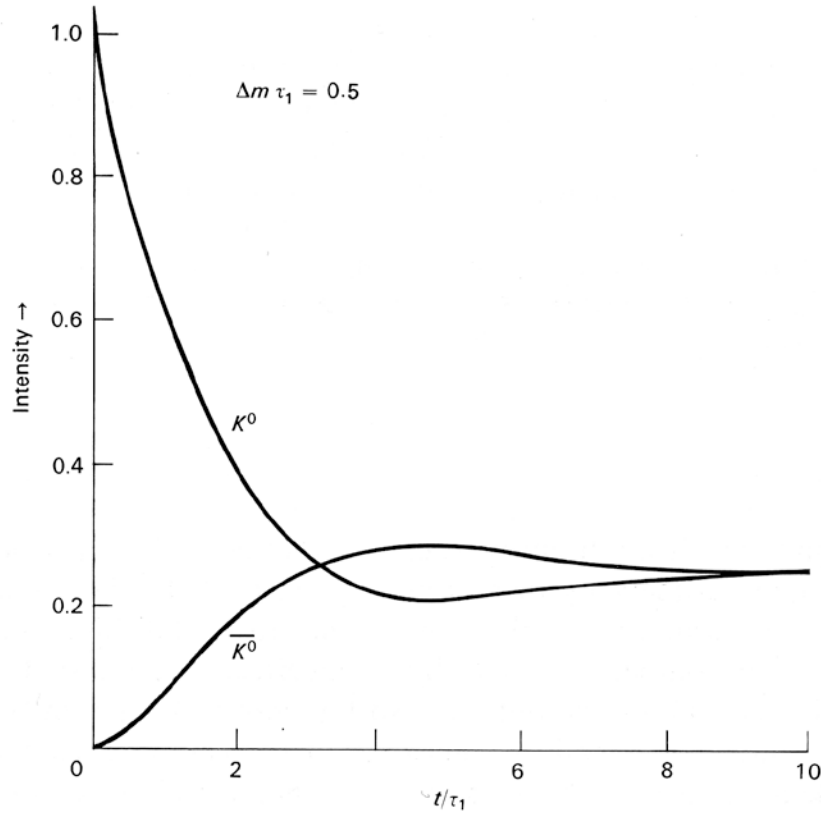


Fig. 6.22 Oscillations of K^0 - and \bar{K}^0 -intensities, for an initially pure K^0 -beam, as calculated from Eqs. (6.84) and (6.85). A value $\Delta m \tau_1 = 0.5$ has been assumed.

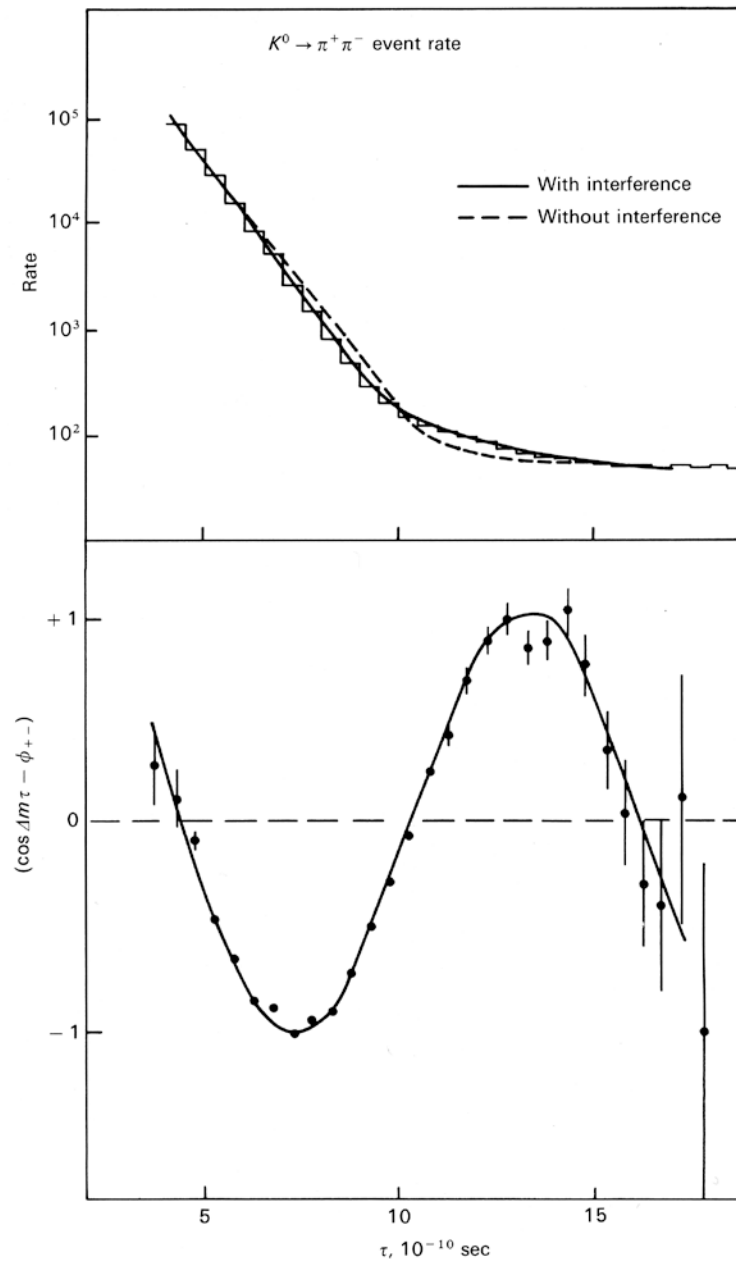
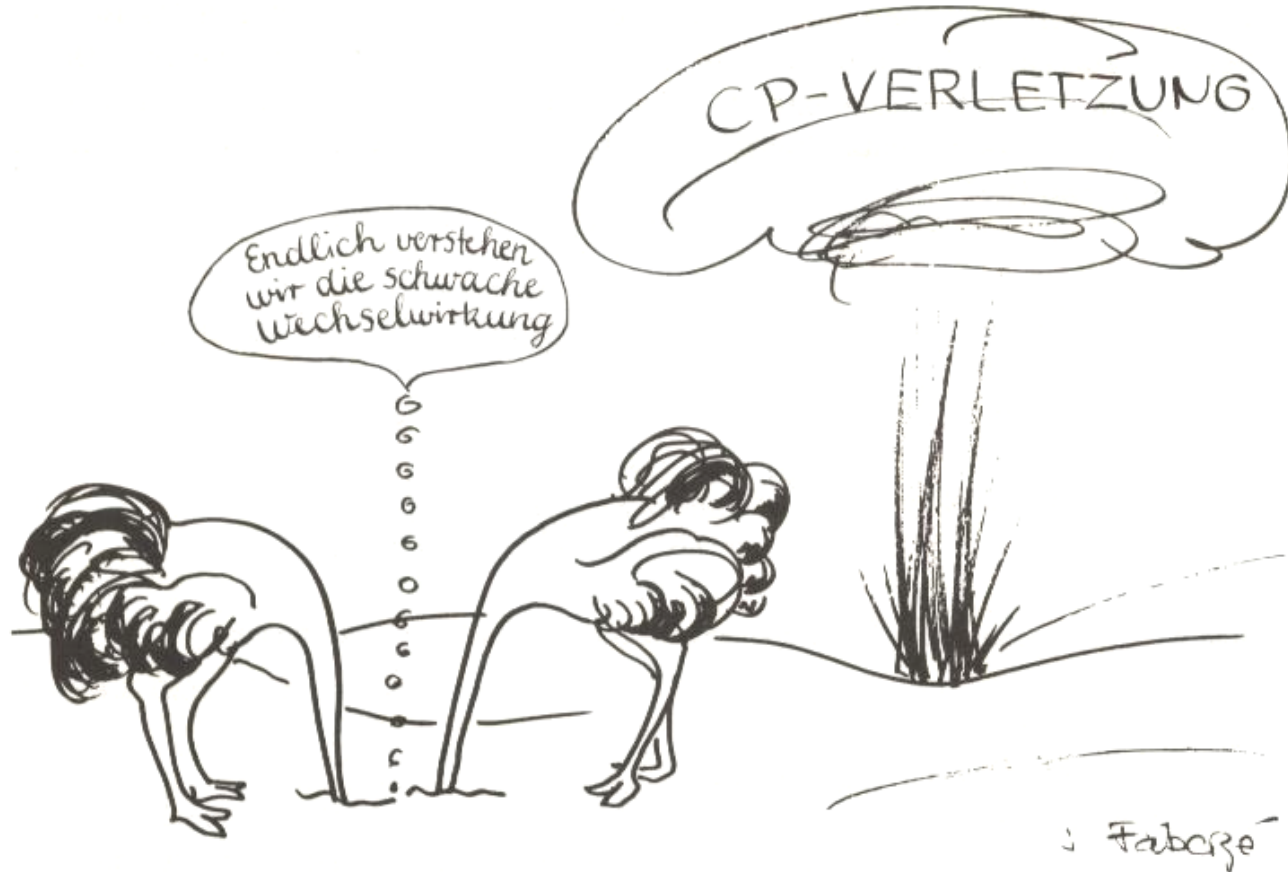


Fig. 6.27 (a) Event rate for $\pi^+ \pi^-$ decays from a neutral kaon beam as a function of proper time, demonstrating that the best fit needs the existence of interference between K_L and K_S amplitudes. (b) The interference term extracted from the results in (a). From the fit one can obtain the K_L - K_S mass difference Δm and the phase angle ϕ_{+-} between the two amplitudes. (After Geweniger *et al.* 1974.)



J. Fabergé, *CERN Courier*, 6, Nr. 10, 193 (Oktober 1966). (Mit freundlicher Genehmigung von Frau Fabergé.)