

# **Experimentalphysik V - Kern- und Teilchenphysik Vorlesungsmitschrift**

Dozent: Prof. K. Jakobs

Verfasser: Ralf Gugel

13. Januar 2013

# 4. Das Schalenmodell des Kerns

## Motivation:

Die Feinstruktur der Bindungsenergie pro Nukleon ist bisher nicht erklärt. Es existieren sog. magische Zahlen, 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ..., für die energetisch besonders günstige Konfigurationen vorliegen. Diese Zahlen suggerieren Schalenabschlüsse, analog zur Elektronenhülle (Edelgaskonfiguration) → Quantenmechanik.

Betrachtet werden Einteilchenzustände. Die Potentialverhältnisse im Kern weisen im Gegensatz zur Atomhülle kein dominierendes Zentralpotential auf, statt dessen dominieren kurzreichweitige Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen:

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^A V_{ij} \quad (4.1)$$

kin. Energie                      Nukleon-Nukleon Potential

Man beschreibt daher die Wechselwirkung aller Nukleonen auf Nukleon  $i$  durch ein *mittleres Potential* (in Analogie zu Mehrelektronensystemen in der Atomphysik). → Hartree-Fock-Verfahren, iterative Lösung.

$$\Rightarrow H = \sum_{i=1}^A (T_i + V_i) \Big|_{\text{Restwechselwirkungen}} + V_R \quad (4.2)$$

Wobei die  $V_i$  ein gemittelt Potential darstellen. Man betrachtet nun also Zustände *eines* Nukleons in einem von anderen erzeugten mittleren Potential

→ Jeder Energiezustand wird nach dem Pauli-Prinzip mit einer erlaubten Zahl von Nukleonen besetzt.

→ Ein Schalenabschluss wird durch ein voll besetztes Energieniveau sowie eine große Energiedifferenz zum nächsten Niveau gekennzeichnet.

## Form des mittleren Potentials?

Bekannt ist, dass kurzreichweitige Kräfte zwischen den Nukleonen vorliegen, ebenso, dass die Nukleonen im Kerninneren von allen Seiten die selbe Kraft erfahren. → Man setzt an, dass das Potential in der Mitte flach ist. Weiterhin sollte das Potential symmetrisch um den Kernmittelpunkt sein.

Weiter ist aus Streuexperimenten bekannt, dass ein relativ scharf definierter Kernrand vorliegt.

#### 4. Das Schalenmodell des Kerns

##### Ansätze

(i) Rechteckpotential:  $V(r) = -V_0 (1 - \theta(r - R_0))$

(ii) Harmonischer Oszillator-Potential:  $V(r) = \begin{cases} -V_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right) & \text{für } r \leq R_0 \\ 0 & \text{für } r > R_0 \end{cases}$

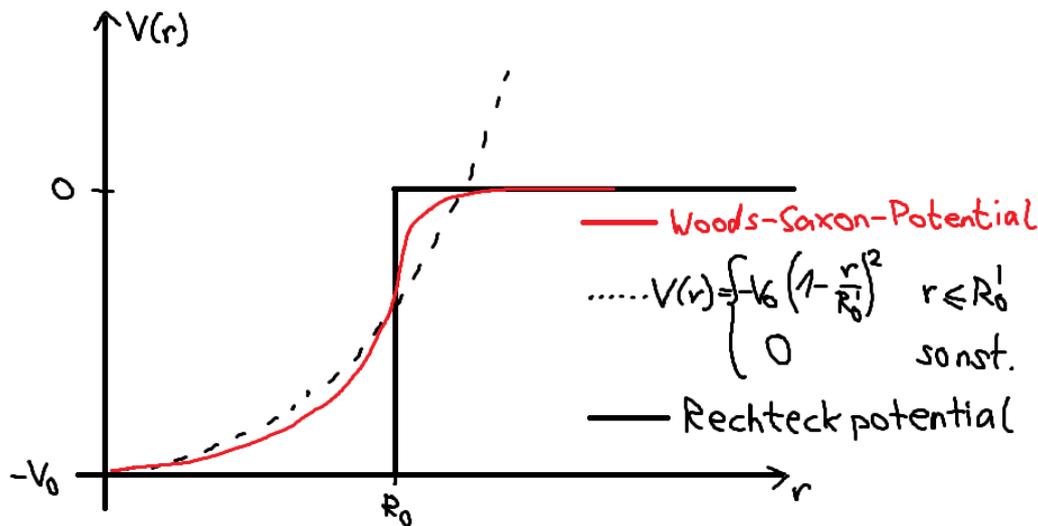


Abbildung 4.1: Rechteckpotential, harmonischer Oszillator-Potential und Woods-Saxon-Potential. (Beachte: Das beim Rechteckpotential auftretende  $R_0$  entspricht nicht dem  $R'_0$  des harmonischer Oszillator-Potentials.)

(iii) Woods-Saxon-Potential: Dieses Potential stellt ein realistischeres Potential dar, welches der Dichteverteilung der Kerne (Ladung) ähnelt:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{-\frac{(r-R_0)}{a}}} \quad (4.3)$$

$a$  stellt hierbei ein Maß für die Randunschärfe dar.

Auf Grund der Radialsymmetrie kann die Lösung der Schrödinger-Gleichung in Radial- und Winkelanteil separiert werden. Da der Winkelanteil in einem solchen Fall nicht vom Potential abhängt, folgt sofort, dass die Wellenfunktion separiert in Radial- und Winkelanteil. Letzterer ist bereits bekannt:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (4.4)$$

#### 4. Das Schalenmodell des Kerns

Man muss nun also noch Lösungen für  $R(r)$  oder  $u(r) = r \cdot R(r)$  finden:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} \left[ E - V(r) - \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0 \quad (4.5)$$

Die Energiewerte sollten von  $n$  und  $\ell$  abhängen<sup>1</sup>

Für die Fälle (i) und (ii) ist die Schrödingergleichung analytisch lösbar, falls  $V(r) \rightarrow \infty$  für (i)  $r = R_0$  bzw. (ii)  $r \rightarrow \infty$ . Dies stellt eine (geringfügige) Verschiebung der Energieniveaus dar.

Für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator ist

$$E_{n,\ell} = \left( 2(n-1) + \ell + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \quad (4.6)$$

$$E_\lambda = \left( \lambda + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega$$

wobei  $\lambda = 2(n-1) + \ell$  und

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Es ergibt sich somit in der Näherung eines harmonischen Oszillator-Potentials:

- äquidistante Energieniveaus
- Energieniveaus sind entartet, verschiedene  $(n, \ell)$ -Kombinationen liefern gleiche  $\lambda$ -Werte:

$$\lambda = 2 \begin{cases} n = 1, \ell = 2 & 1d \\ n = 2, \ell = 0 & 2s \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\lambda = 3 \begin{cases} n = 1, \ell = 3 & 1f \\ n = 2, \ell = 1 & 2p \end{cases} \quad (4.9)$$

- Diese Entartung wird beim Rechteckpotential ebenso wie bei Woods-Saxon-Potential aufgehoben. Die Energieniveaus hängen dann explizit von  $n$  und  $\ell$  ab.
- Jeder Zustand mit Quantenzahl  $\ell$  hat  $(2\ell + 1)$ -fache Entartung nach der magnetischen Quantenzahl  $m$

<sup>1</sup>Die Entartung der Niveaus beim Wasserstoff (d.h. die Radiale Schrödingergleichung enthält kein  $\ell$ ) ist eine Besonderheit des Coulomb-Potentials!

#### 4. Das Schalenmodell des Kerns

- Durch das Pauliprinzip ergibt sich die Anzahl der Nukleonen (jeweils Protonen und Neutronen; getrennte Potentialtöpfe) zu

$$\begin{aligned}
 \ell = 0 & \quad \# \text{ Nukleonen } p, n = 2 \\
 \ell = 1 & \quad \quad \quad \quad \quad = 6 \\
 \ell = 2 & \quad \quad \quad \quad \quad = 10 \\
 \ell = 3 & \quad \quad \quad \quad \quad = 14 \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Für das Rechteckpotential sind die Lösungen durch sphärische Besselfunktionen gegeben:

$$u_{n,\ell} = j_\ell(k_{n,\ell} \cdot r) \quad \text{mit} \quad k_{n,\ell} = \sqrt{\frac{2mE_{n,\ell}}{\hbar^2}} \tag{4.11}$$

Durch die Randbedingung

$$j_\ell(k_{n,\ell} \cdot R_0) = 0 \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4.12}$$

kommt es zur Quantelung der Energieniveaus: Nullstellen der Besselfunktionen sind einfach, d.h. nicht entartet. Somit gibt es keine Entartung für verschiedene Kombinationen von  $n$  und  $\ell$ . Auf Grund der Rotationsinvarianz gibt es jedoch eine  $(2\ell+1)$ -fache Entartung bzgl. der magnetischen Quantenzahl  $m^2$ . Wie beim harmonischen Oszillatorpotential ergeben sich die Nukleonenzahlen je Niveau.

Da Protonen und Neutronen (jeweils) ununterscheidbare Teilchen sind kann ein Zustand mit Bahndrehimpuls  $\ell$  mit  $\nu = 2 \cdot (2\ell + 1)$  Spin- $1/2$ -Nukleonen besetzt werden.  $\Rightarrow$  Schalenabschlüsse bei 2, 8, 20 in beiden Modellen (harmonischer Oszillator und Rechteckpotential). Es werden jedoch keine höheren magischen Zahlen beschrieben!  $\Rightarrow$  Durch ein reines radialsymmetrisches Potential können die magischen Zahlen nicht erklärt werden.

##### Spin-Bahn-Wechselwirkung

Wichtige Ergebnisse zur Spin-Bahn-Kopplung lieferten Maria Goeppert-Mayer sowie Jensen, Haxel und Suess

Es wird ein Korrekturterm in Analogie zur Atomhülle eingeführt, der die Wechselwirkung zwischen Spin und Bahndrehimpuls eines Nukleons beschreibt. In der Atomhülle sind die Effekte der Spin-Bahn-Kopplung relativ klein, sie führen zur Feinstrukturaufspaltung. Im Kern ist die Spin-Bahn-Kopplung in der gleichen Größenordnung wie die Termabstände.

In Analogie zur Atomhülle setzt man an:

$$V_i = V(r) + V_{\ell s}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s} \tag{4.13}$$

---

<sup>2</sup>Zur Erinnerung:  $\ell$  ist die Kopplungskonstante zwischen Radial- und Winkelanteil,  $m$  die Kopplungskonstante zwischen  $\theta(\vartheta)$  und  $\phi(\varphi)$ ,  $\theta(\vartheta) \cdot \phi(\varphi) = Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ .  $m$  tritt nur im Winkelanteil auf.

#### 4. Das Schalenmodell des Kerns

wobei  $\vec{\ell}$  und  $\vec{s}$  die Bahn- und Spin-Drehimpulsoperatoren eines Nukleons sind.  $V_{\ell s}(r)$  ist eine beliebige Funktion der radialen Koordinate und beschreibt die radiale Abhängigkeit des Spin-Bahn-Potentials. Es gilt:

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle j^2 \rangle - \langle \ell^2 \rangle - \langle s^2 \rangle \} = \frac{1}{2} \left\{ j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right\} \quad (4.14)$$

Somit ist für

$$\begin{aligned} j = \ell + 1/2 & \quad \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = 1/2\ell & \quad V_i = V(r) + \frac{1}{2}V_{\ell s} \cdot \ell \\ j = \ell - 1/2 & \quad \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = -1/2(\ell + 1) & \quad V_i = V(r) - \frac{1}{2}V_{\ell s} \cdot (\ell + 1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\Delta E = E(\ell + 1/2) - E(\ell - 1/2) = \frac{1}{2}V_{\ell s}(2\ell + 1) \quad (4.16)$$

Die Aufspaltung ist somit  $\sim (2\ell + 1)$ , d.h. wir erhalten große Effekte für große  $\ell$ -Werte, die zu einer Umordnung der Energieniveaus führen.  $V_{\ell s}$  ist nicht aus fundamentalen Prinzipien berechenbar und muss daher (basierend auf Modellen) angepasst werden an experimentelle Daten. Wenn  $V_{\ell s}(r)$  ebenso wie  $V(r)$  negativ ist, so liegen die Zustände für  $j = (\ell - 1/2)$  energetisch höher als für  $j = (\ell + 1/2)$ .

Experimentelle Evidenz findet man aus der Streuung von Neutronen an  ${}^4_2\text{He}$ :

- ${}^4_2\text{He}$  hat den  $(1s)$ -Zustand vollständig besetzt.
- Die nächst höher liegenden Zustände sind  $1p_{3/2}$  und  $1p_{1/2}$ .

Die Analyse der Streuung von Neutronen an  ${}^4_2\text{He}$  zeigt, dass der  $j = 3/2$ -Zustand niedriger als der  $j = 1/2$ -Zustand liegt.

Weitere Korrekturen auf Grund der Coulomb-Wechselwirkung zwischen Protonen führen zu leichten Unterschieden zwischen  $p$ - und  $n$ -Niveaus.

Mittels des Schalenmodells inklusive  $\vec{\ell}\vec{s}$ -Kopplung (und Coulomb-Wechselwirkung) lassen sich somit die magischen Zahlen erklären, da die Spin-Bahn-Kopplung eine starke Verschiebungen ( $\Delta E \sim \ell$ ) hervorruft, welche zu einer Umsortierung der Niveaus führt.

Wegen  $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$  erwartet man eine  $(2j + 1)$ -fache Entartung der Protonen- und Neutronenniveaus. Die Parität ist bestimmt durch die Winkelsymmetrie, d.h.  $Y_\ell^m$ . Daher ist

$$\pi = (-1)^\ell, \quad \ell = \begin{matrix} s, p, d, f, g \\ 0, 1, 2, 3, 4 \end{matrix} \quad (4.17)$$

Energieniveaus gruppieren sich um gerade / ungerade  $\ell$ -Werte, so dass den Schalen eine definierte Parität zugeordnet werden kann.

**p-Gruppe** negative Parität

**s,d-Gruppe** positive Parität

#### 4. Das Schalenmodell des Kerns

##### **p,f-Gruppe** negative Parität

→ Die Energieniveaus gruppieren sich um gerade/ungerade  $\ell$ -Werte → definierte Parität.

Vorhersagen des Schalenmodells:

Die Energieniveaus werden mit Protonen und Neutronen aufgefüllt (getrennte Niveauschema!)

(1) Magische Zahlen

(2) Hohe Bindungsenergie für doppelt magische Kerne: Für 2, 8 und 20 trifft dies zu, jedoch ist  ${}^{56}_{28}\text{Ni}_{28}$  bereits instabil, seine  $\beta$ -Lebensdauer ist allerdings deutlich größer als für Nachbarkerne:

- $\tau({}^{56}_{28}\text{Ni}_{28}) = 6.1\text{d}$
- $\tau({}^{57}_{28}\text{Ni}_{29}) = 36\text{h}$
- $\tau({}^{55}_{27}\text{Co}_{28}) = 18\text{h}$

Ein doppelt magischer, stabiler Kern tritt auf bei

$$\boxed{{}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}} \quad (4.18)$$

Dieses Isotop stellt den Endpunkt der Uran-/Thorium-  $\alpha$ -Zerfallsreihen dar.

(3) Spin und Parität:

- In jeder abgeschlossenen  $j$ -Unterschale (z.B.  $p_{3/2}$ ,  $d_{5/2}$ ) sind alle magnetischen  $m_j$ -Zustände voll besetzt → alle Nukleonen koppeln zum Spin-0.
- Im Einklang mit Experimenten: Kerne mit abgeschlossenen Protonen- und Neutronenschalen haben Spin-0, sind kugelsymmetrisch
- Quadrupoldeformationen verschwinden bei magischen Nukleonenzahlen.
- Für ein einzelnes Nukleon außerhalb einer abgeschlossenen Unterschale sind Spin und Parität durch das Niveau bestimmt, in welchem sich das Nukleon befindet. Selbiges gilt für 1-Nukleon-Lochzustände (1 fehlendes Nukleon in einer Schale). Beispiel:  ${}^{15}_8\text{O}_7 \rightarrow J^\pi = 1/2^-$  (ein fehlendes Neutron),  ${}^{17}_8\text{O}_9 \rightarrow J^\pi = 5/2^+$  (ein Neutron in der  $1d_{5/2}$ -Schale).
- Die Situation ist schwieriger bei nur teilweise gefüllten  $j$ -Schalen, wegen der starken  $\vec{\ell}$ - $\vec{s}$ -Kopplung erwartet man eine  $j$ - $j$ -Kopplung der Nukleonen:  $\vec{I} = \sum_i \vec{j}_i$ . Für zwei Nukleonen in der  $f_{7/2}$ -Schale erhält man

$$j_{\text{ges}} = 7/2 \otimes 7/2, \quad 0 \leq I \leq 7 \quad (4.19)$$

#### 4. Das Schalenmodell des Kerns

Das Pauli-Prinzip bewirkt, dass ungerade, ganzzahlige Spins ausgeschlossen sind  $\Rightarrow I = 0, 2, 4, 6^3$ .

- Generell gilt auch für nicht abgeschlossene Schalen: alle geradzahlig vorkommenden Nukleonen koppeln zum Drehimpuls 0  $\rightarrow$  (gg)-Kerne besitzen  $I = 0$ .

(4) Vorhersage/Bestätigung von isomeren Zuständen:

- langlebige  $\gamma$ -Übergänge mit hoher Drehimpulsänderung  $\Delta I$ , z.B.  $2p_{1/2}$  Schale  $\rightarrow 1g_{9/2}$  bei [39-42] ( $p, n$ ) (17 Isomere mit M4, sowie weitere Isomerinseln [65-81] und [101-125])

---

<sup>3</sup>Details der Spin-Kopplung bei nicht-abgeschlossenen Schalen mit mehreren Nukleonen hängen von der Spin-Abhängigkeit der Nukleonenkräfte ab. Diese sind im Schalenmodell nicht berücksichtigt, sie fallen unter die Restwechselwirkungen.

4. Das Schalenmodell des Kerns

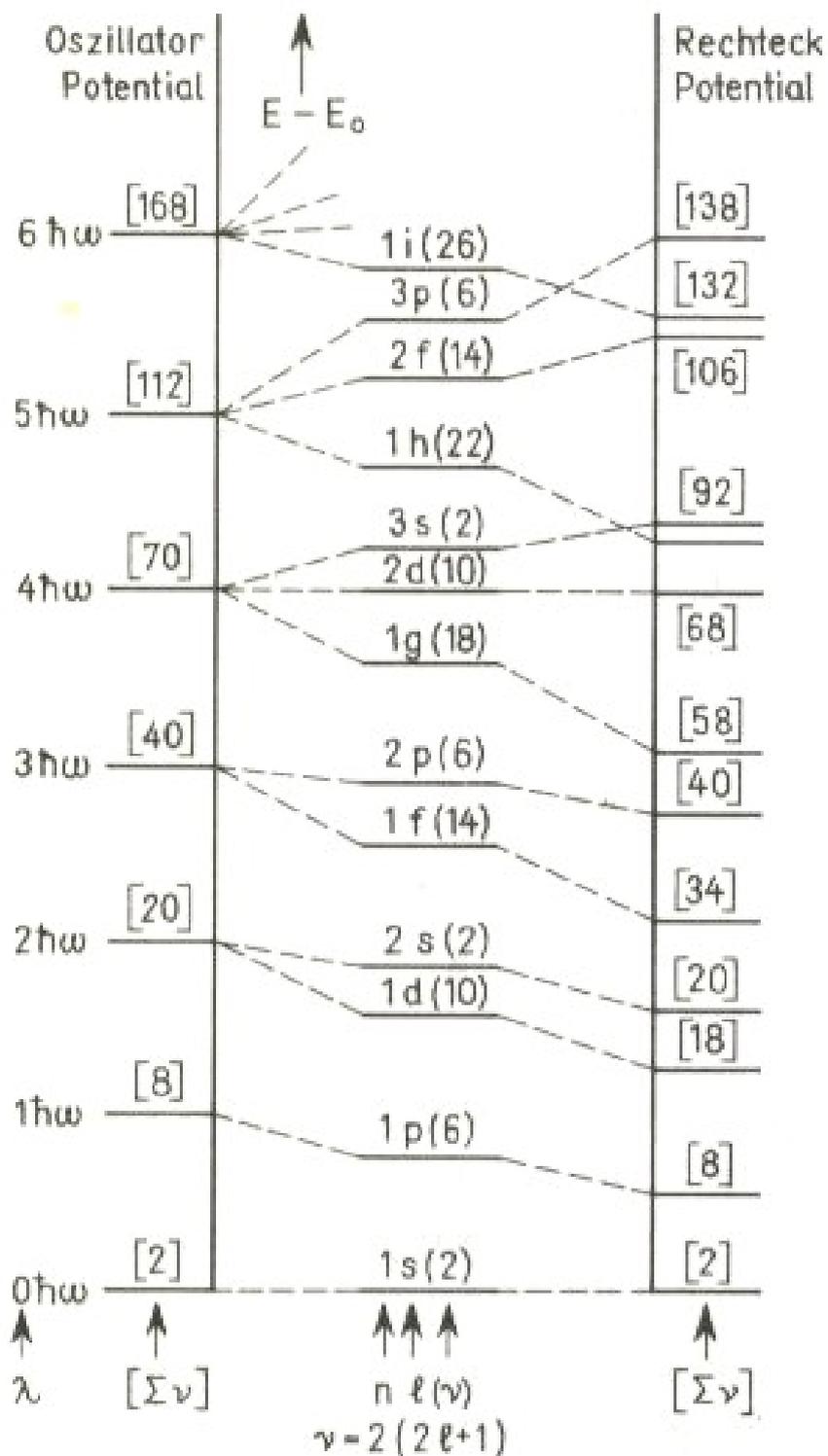


Abbildung 4.2: Energieniveaus im Oszillator- und im Rechteckpotential, in der Mitte interpolierte Werte (aus Ref. [1])

#### 4. Das Schalenmodell des Kerns

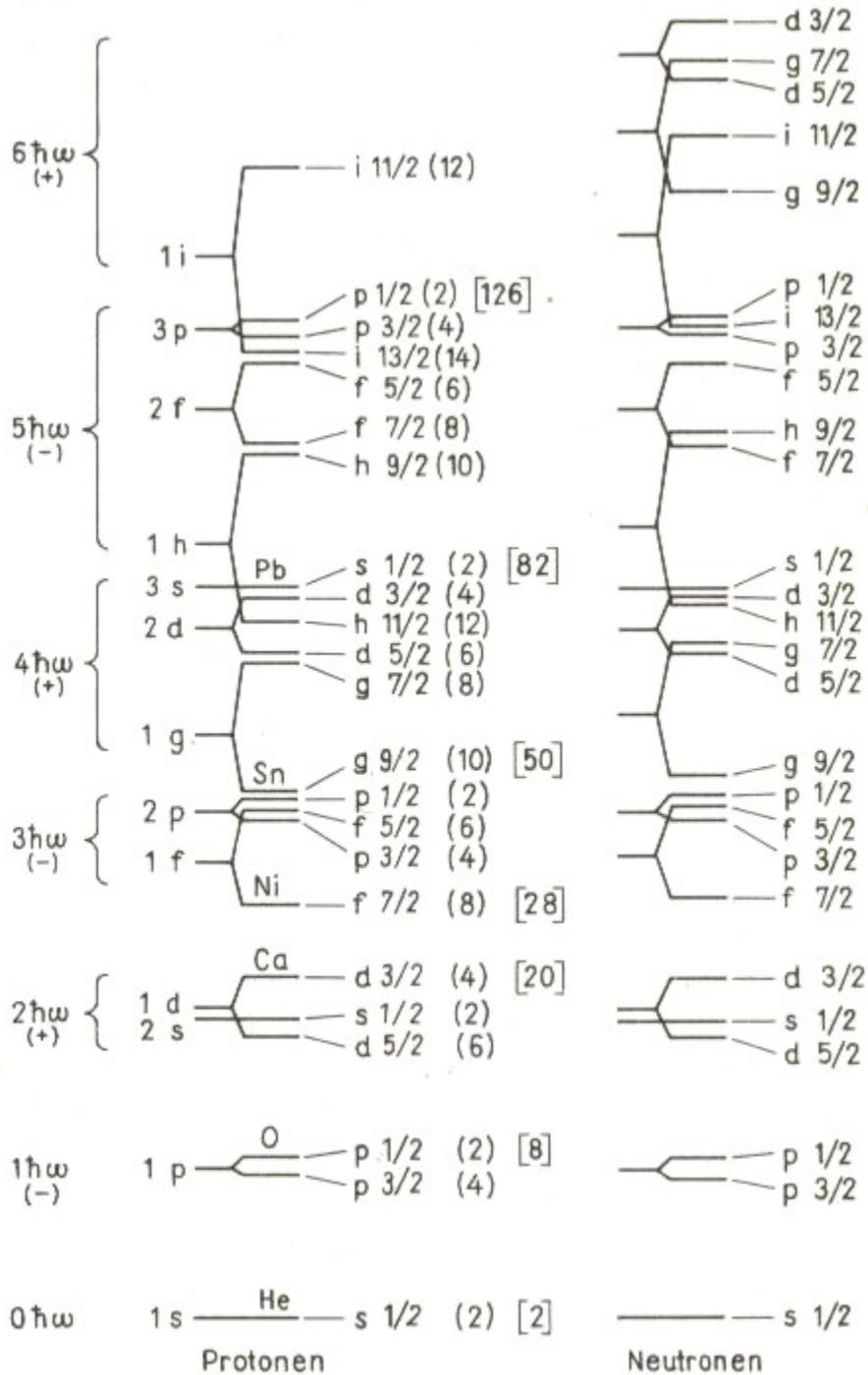


Abbildung 4.3: Energieniveaus nach dem Schalenmodell mit Spin-Bahn-Aufspaltung (aus Ref. [1]).

#### 4. Das Schalenmodell des Kerns

$n\ell j$	1 s 1/2	1 p 3/2	1 p 1/2	1 d 5/2	2 s 1/2	1 d 3/2	1 f 7/2
$\nu = 2j + 1$	2	4	2	6	2	4	8
$\Sigma \nu$	2	6	8	14	16	20	28
	${}^4_2\text{He}_2$		${}^{16}_8\text{O}_8$			${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$	${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$ ( ${}^{56}_{28}\text{Ni}_{28}$ )

Abbildung 4.4: Auffüllen der Kernschalen (aus Ref. [1])

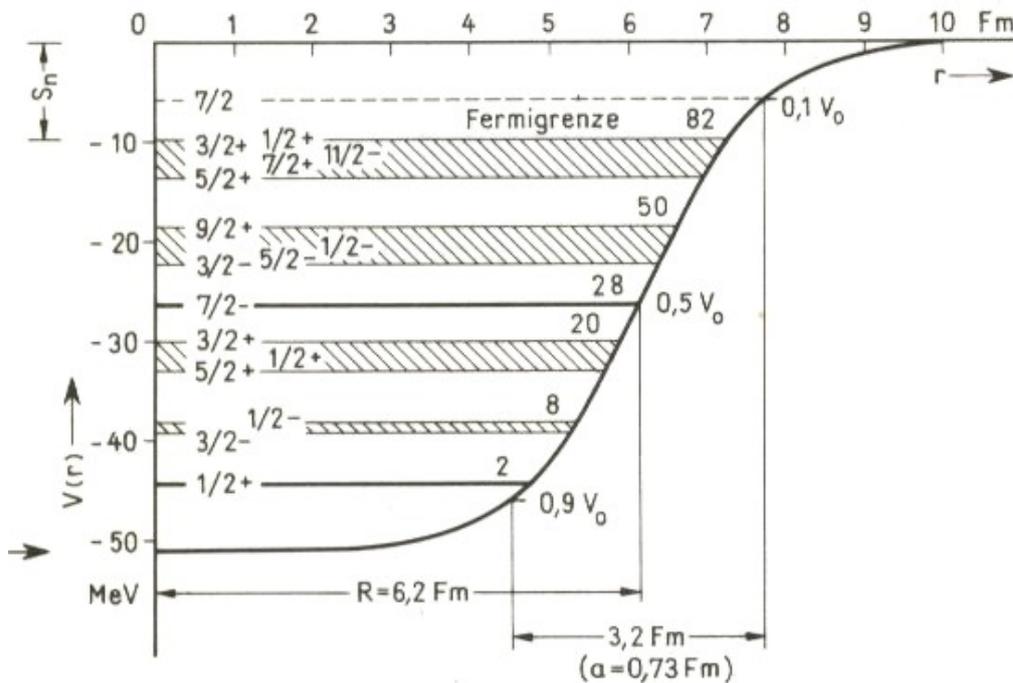


Abbildung 4.5: Auffüllen der Kernschalen (aus Ref. [1])

#### 4. Das Schalenmodell des Kerns

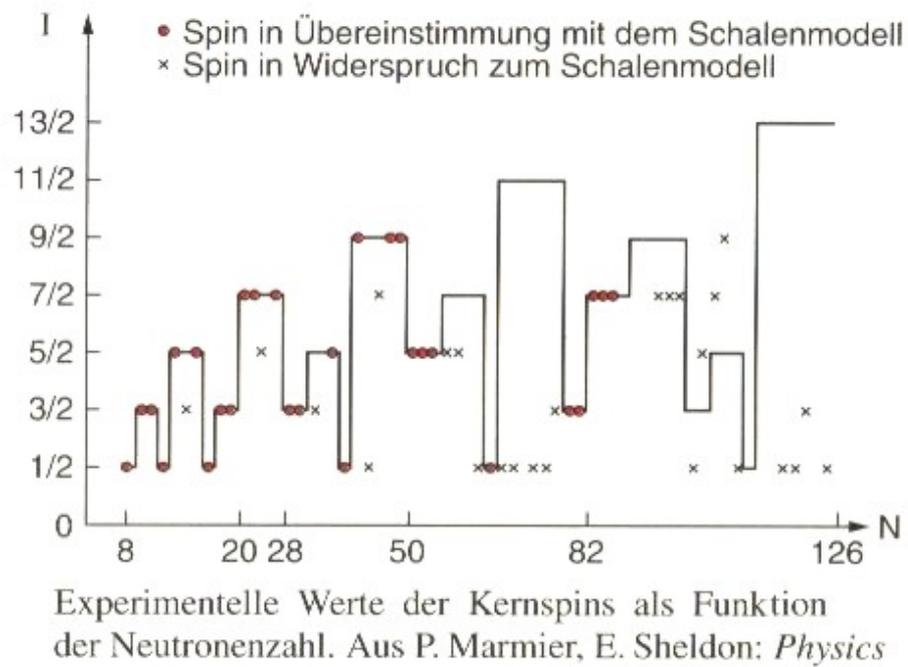


Abbildung 4.6: Experimentelle Werte des Kernspins als Funktion der Nukleonenzahl im Vergleich zu den Vorhersagen des Schalenmodells (aus Ref. [12]).

# Literaturverzeichnis

- [1] Th. Mayer-Kuckuck, *Kernphysik*, Teuber Verlag
- [2] J. Bleck-Neuhaus, *Elementare Teilchen - Moderne Physik von den Atomen bis zum Standardmodell*, Springer Verlag
- [3] B. Povh, K.Rith, C.Scholz und F. Zetsche, *Teilchen und Kerne*, Springer Verlag
- [4] K. Bethge, G. Walter und B. Wiedemann, *Kernphysik*, Springer Verlag
- [5] D. Griffith, *Introduction to Elementary Particles*, Verlag Wiley-VCH
- [6] F. Halzen und A.D. Martin, *Quarks & Leptons*, Verlag J. Wiley
- [7] C. Grupen, *Teilchendetektoren*, BI Wissenschaftsverlag
- [8] W.R.Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Springer Verlag
- [9] K. Kleinknecht, *Detektoren für Teilchenstrahlung*, Teuber Verlag
- [10] E. Bodenstedt, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung*, BI Wissenschaftsverlag (1978)
- [11] P. A. Tipler und R. A. Llewellyn, *Moderne Physik*, Oldenburg Verlag (2002)
- [12] W. Demtröder, *Experimentalphysik 4, Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, Springer Verlag
- [13] *Reaktorphysik*, Universität Bonn (1982)