

## 8. Drehbewegung starrer Körper

8.1 Trägheitsmoment um eine raumfeste Achse

8.2 Dynamisches Grundgesetz für Drehbewegungen

8.3 Drehung um freie Achsen

8.4 Hauptträgheitsmomente

8.5 Kreiselbewegungen

### Berechnung von Trägheitsmomenten

Beispiele von Körpern mit homogener Massenverteilung

$$\theta = \int_V r^2 \cdot \rho \cdot dV = \int_V r^2 \cdot dm$$

- (i) Trägheitsmoment einer homogenen Scheibe mit einer Gesamtmasse  $M$  und Radius  $R$

Massenelement: Ring mit Radius  $r$  und der Dicke  $dr$

Seine Masse ist geg. durch den Anteil an der Gesamtfläche \*  $M$

$$dm = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{\pi \cdot R^2}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}\theta &= \int_V r^2 \cdot dm = M \int_0^R r^2 \frac{2\pi r}{\pi R^2} \cdot dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{2} M \cdot R^2\end{aligned}$$

- Falls gesamte Masse in einem äußeren Ring konzentriert wäre, würde sich ergeben  $\theta' = MR^2$ ;
- Es geht keine Annahme über die Dicke der Scheibe ein;  
⇒ Überlegungen gelten ebenso für einen Vollzylinder mit Masse  $M$ , unabhängig von seiner Höhe.

(ii) Für einen Hohlzylinder mit Radien  $R_1$  und  $R_2$  ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} A &= \pi(R_2^2 - R_1^2) \\ dA &= 2\pi \cdot r \cdot dr \\ dm &= M \frac{dA}{A} = M \frac{2 \cdot r \cdot dr}{(R_2^2 - R_1^2)} \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2M}{(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^3 \cdot dr = \frac{2M}{(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4) \\ &= \frac{1}{2}M \cdot (R_1^2 + R_2^2) \end{aligned}$$


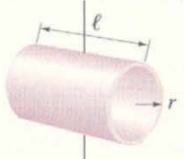
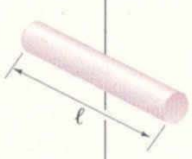
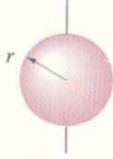



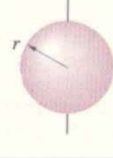
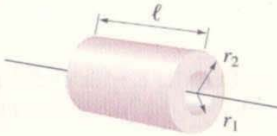
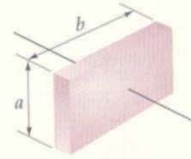
(iii) Quader mit Kantenlängen  $a, b, c$  in  $x, y, z$ -Richtung  
Drehachse parallel zur  $z$ -Achse,  
die durch den Schwerpunkt geht  
(Mittelpunkt des homogenen Quaders).

Ausführung eines expliziten Volumenintegrals

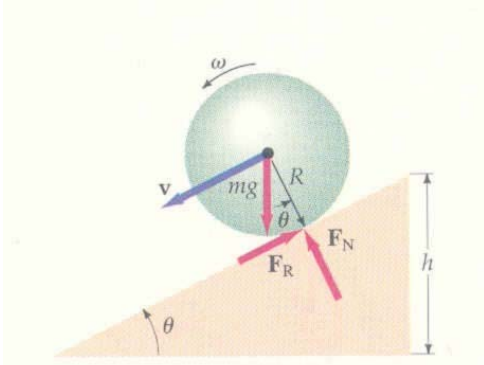
$$\theta = \int r^2 \rho \, dV$$

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{-c/2}^{c/2} dz \cdot \int_{-b/2}^{b/2} dy \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \rho \cdot (x^2 + y^2) \cdot dx \\ &= \rho \cdot c \cdot \int_{-b/2}^{b/2} dy \cdot \left( \frac{x^3}{3} + x \cdot y^2 \right) \Big|_{-a/2}^{a/2} \\ &= \rho \cdot c \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{a^3}{12} + a \cdot y^2 \right) dy \\ &= \rho \cdot c \cdot \left( \frac{a^3}{12} \cdot y + \frac{a}{3} \cdot y^3 \right) \Big|_{-b/2}^{b/2} \\ &= \rho \cdot c \left( \frac{1}{12} a^3 b + \frac{1}{12} a b^3 \right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot abc \cdot (a^2 + b^2) \\ &= \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

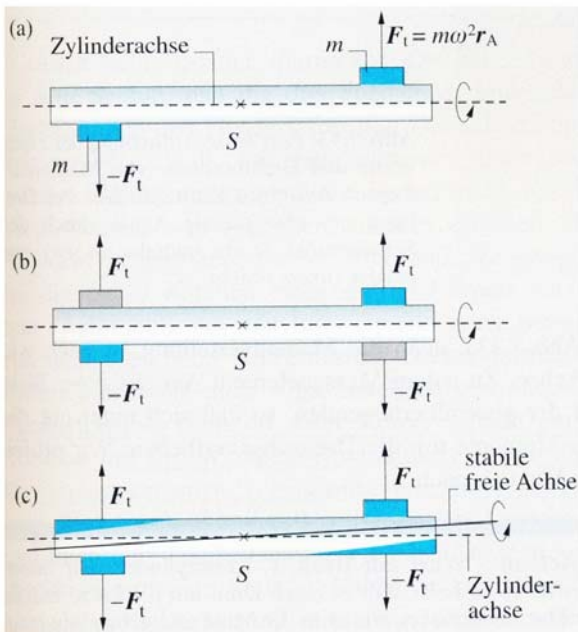
(Beachte: die Gesamtmasse ist gegeben durch  $M = \rho \cdot V = \rho \cdot abc$ )

<p>Zylindermantel; Drehachse = Körperachse</p>  $I = m_{\text{ges}} r^2$	<p>Zylindermantel; Drehachse durch Mittel- punkt <math>\perp</math> Körperachse</p>  $I = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} r^2 + \frac{1}{12} m_{\text{ges}} \ell^2$	<p>Dünner Stab; Drehachse durch Mittel- punkt <math>\perp</math> Körperachse</p>  $I = \frac{1}{12} m_{\text{ges}} \ell^2$	<p>Dünne Kugelschale; Drehachse durch Mittelpunkt</p>  $I = \frac{2}{3} m_{\text{ges}} r^2$
<p>Massiver Zylinder; Drehachse = Körperachse</p>  $I = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} r^2$	<p>Massiver Zylinder; Drehachse durch Mittel- punkt <math>\perp</math> Körperachse</p>  $I = \frac{1}{4} m_{\text{ges}} r^2 + \frac{1}{12} m_{\text{ges}} \ell^2$	<p>Dünner Stab; Drehachse durch ein Ende <math>\perp</math> Körperachse</p>  $I = \frac{1}{3} m_{\text{ges}} \ell^2$	<p>Massive Kugel; Drehachse durch Mittelpunkt</p>  $I = \frac{2}{5} m_{\text{ges}} r^2$
<p>Hohlzylinder; Drehachse = Körperachse</p>  $I = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} (r_1^2 + r_2^2)$	<p>Massiver Quader; Drehachse durch Mittelpunkt <math>\perp</math> Oberfläche</p>  $I = \frac{1}{12} m_{\text{ges}} (a^2 + b^2)$		

Vergleich zwischen linearer Bewegung und Drehbewegung			
lineare Bewegung		Drehbewegung	
Verschiebung	$\Delta x$	Drehwinkel	$\Delta \varphi$
Geschwindigkeit	$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$
Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung	$v = v_0 + at$ $\Delta x = \langle v \rangle \Delta t$ $\langle v \rangle = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$	Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta \varphi = \langle \varphi \rangle \cdot \Delta t$ $\langle \omega \rangle = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \Delta \varphi$
Masse	$m$	Trägheitsmoment	$\Theta$
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L = \Theta \cdot \omega$
Kraft	$F$	Drehmoment	$D$
kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$	kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$
Leistung	$P = Fv$	Leistung	$P = D \cdot \omega$
zweites Newtonsches Axiom	$F = \frac{dp}{dt} = ma$	zweites Newtonsches Axiom	$D = \frac{dL}{dt} = \Theta \cdot \alpha = \Theta \cdot \dot{\varphi}$



Kräfte auf eine Kugel, die eine schiefe Ebene hinabrollt. Die Reibungskraft, die parallel zur Ebene nach oben zeigt, bewirkt ein Drehmoment relativ zum Massenmittelpunkt der Kugel. Dadurch vergrößert sich die Winkelgeschwindigkeit kontinuierlich, während die Kugel, immer schneller werdend, nach unten rollt. Die Rollbedingung bleibt daher während der gesamten Bewegung erhalten. [aus Ref. \[2\]](#)

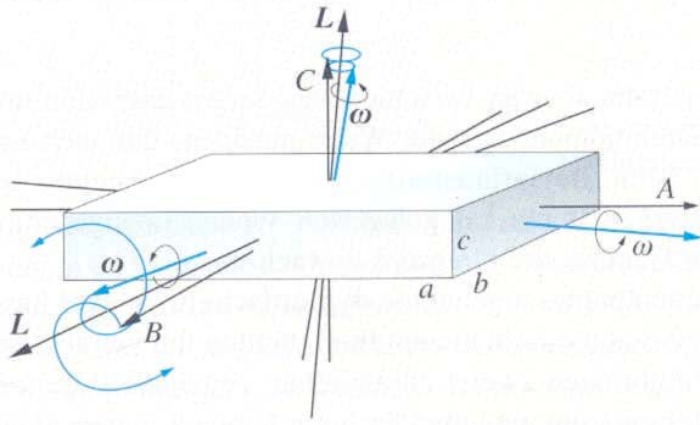


(a) Zylindrische Welle mit Deviationsmoment bezüglich der Zylinderachse durch Anbringen zweier diametraler Nocken.

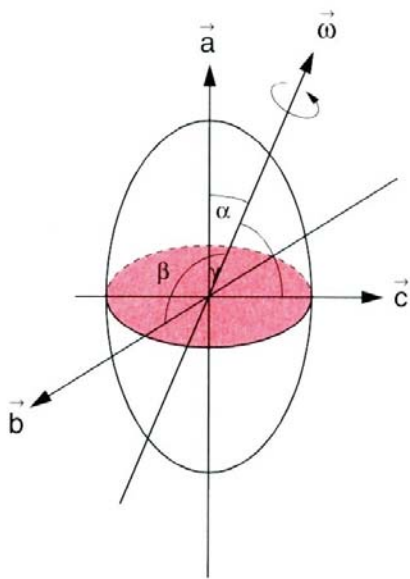
(b) Anullierung des Deviationsmoments durch zwei weitere entgegengesetzte Nocken.

(c) Auffinden einer stabilen freien Achse durch Verkippen.

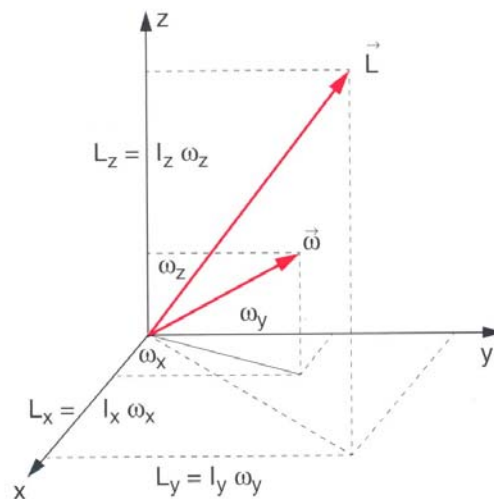
[aus Ref. \[7\]](#)



Freie Rotation eines Quaders jeweils um eine  $\omega$ -Achse in der Nachbarschaft der drei deviationsmomentfreien Symmetrieachsen  $A, B, C$  (Hauptträgheitsachsen). Für  $a > b > c$  gilt  $\theta_A < \theta_B < \theta_C$ .  $L$  ist die Achse des zugehörigen raumfesten Drehimpulses, um den die Symmetrieachse und die  $\omega$ -Achse kegelförmig kreisen. Die Rotation in der Umgebung von  $B$  ist instabil; die Kegel weiten sich auf [aus Ref. \[5\]](#)



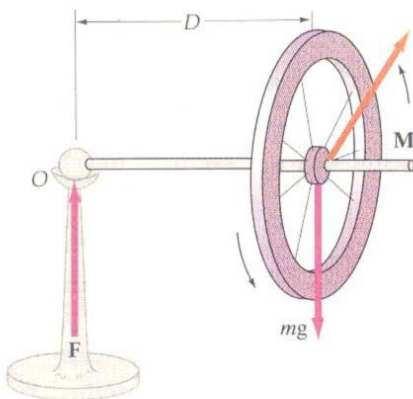
Trägheitsmoment um eine beliebige Achse [aus Ref. \[1\]](#)



Drehimpulsachse und Rotationsachse sind im Allgemeinen nicht parallel [aus Ref. \[1\]](#)

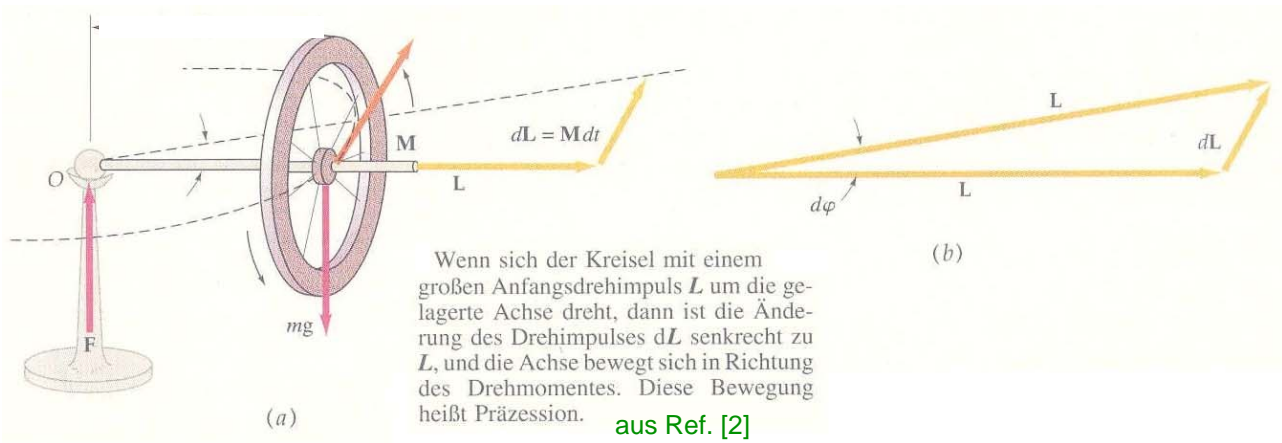


Wolfgang Pauli und Niels Bohr bei der wissenschaftlichen Untersuchung der Kreiselbewegung (1952, anlässlich der Eröffnung des Instituts für Theoretische Physik in Lund / Schweden)

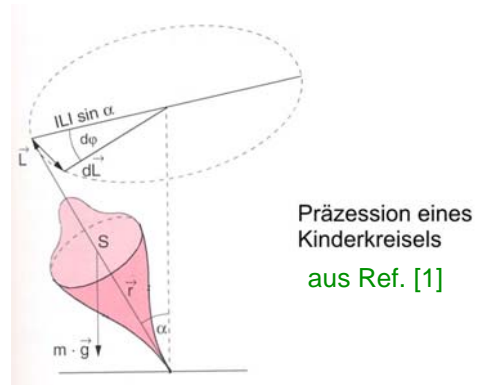


Kreisel aus dem Rad eines Fahrrades. Die Gravitationskraft  $mg$  übt bezüglich des Gelenks am Punkt  $O$  ein Drehmoment  $M$  aus, das senkrecht zur Achse steht. Dieses Drehmoment bewirkt eine Änderung des Drehimpulses in Richtung des Drehmomentes. Wenn sich das Rad nicht dreht und losgelassen wird, dann fällt es einfach hinunter. In diesem Fall führt die Änderung des Drehimpulses zu einem neuen Drehimpuls, der mit der Bewegung des Massenmittelpunkts des Rades zusammenhängt.

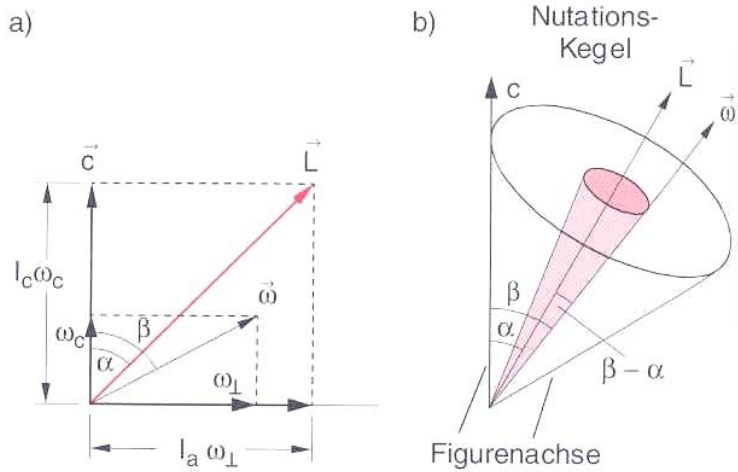
aus Ref. [2]



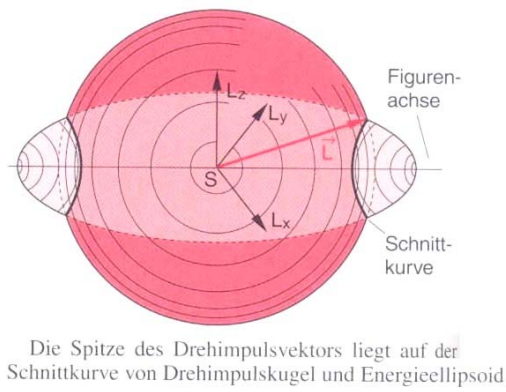
Wolfgang Pauli und Niels Bohr bei der wissenschaftlichen Untersuchung der Kreiselbewegung (1952, anlässlich der Eröffnung des Instituts für Theoretische Physik in Lund / Schweden)



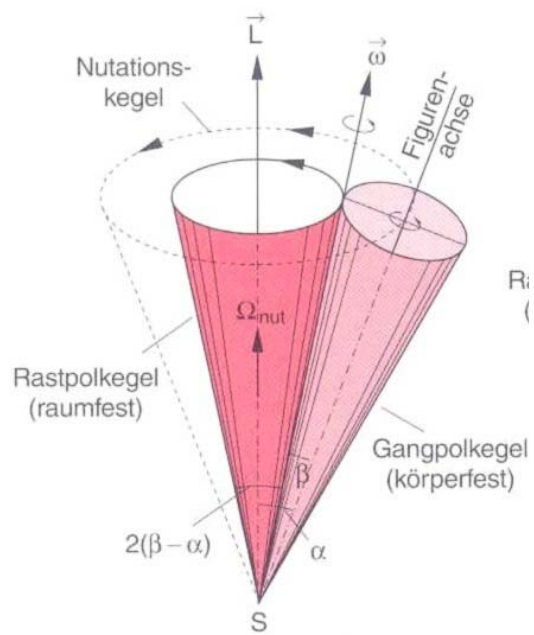




Figurenachse  $c$ , Drehimpulsachse  $L$  und momentane Drehachse  $\omega$ : (a) Zerlegung von  $\omega$  und  $L$  beim symmetrischen Kreisel in eine Komponente parallel zur Figurenachse und eine dazu senkrechte Komponente; (b) Nutationskegel der Figurenachse und der momentanen Drehachse  $\omega$  aus Ref. [1]



Die Spitze des Drehimpulsvektors liegt auf der Schnittkurve von Drehimpulskugel und Energieellipsoid



aus Ref. [1]