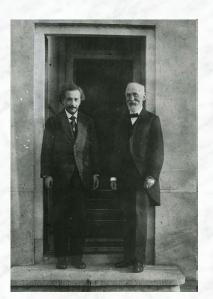
1. Einleitung und Grundbegriffe

- 1.1 Zielsetzung der Teilchenphysik
- 1.2 Gegenstand der Kernphysik
- 1.3 Einheiten
- 1.4 Wirkungsquerschnitt
- 1.5 Relativistische Kinematik



Henrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) Albert Einstein (1879 – 1955)

1.1 Zielsetzung der Teilchenphysik

Elementarteilchenphysik ist ein Teilgebiet der Modernen Physik

"Untersuchung des Aufbaus der Materie und der fundamentalen Wechselwirkungen"

Grundlegende Fragen:

(i) Woraus besteht die Materie die uns umgibt ?Ist sie teilbar ? Wenn ja, wie weit ?Gibt es elementare Bausteine, sog. Elementarteilchen ?

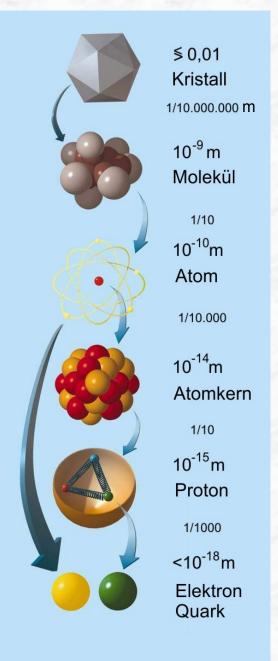
Bausteine

(ii) Welche Kräfte wirken zwischen den Elementarteilchen ? Wie wechselwirken Elementarteilchen untereinander? Welche Struktur haben die Wechselwirkungen ? Lassen sie sich vereinheitlichen ?

Kräfte

→ Übergeordnete Theorie, Weltformel?

Erforschung der Materie



Auge, Mikroskop (Licht)

Elektronenmikroskop (Elektronen)

Teilchenbeschleuniger (Synchrotron-Strahlung)

Teilchenbeschleuniger (Teilchen hoher Energie)

höhere Energie / Impuls

höhere Auflösung

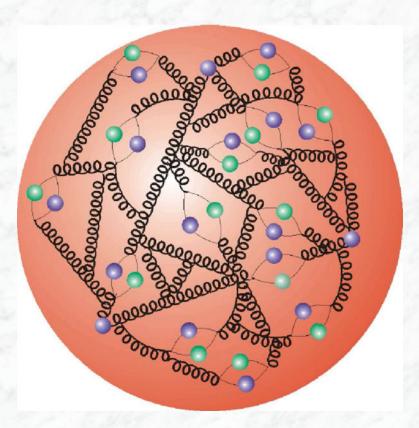
 $\Delta x \propto \frac{1}{p}$ $E = mc^2$

→ Suche nach neuen Materiezuständen

Hohe Teilchenimpulse (Energien) sind notwendig, um das Innere des Atomkerns und kleinere Strukturen untersuchen zu können

Die räumliche Auflösung wird bei hohen Impulsen besser

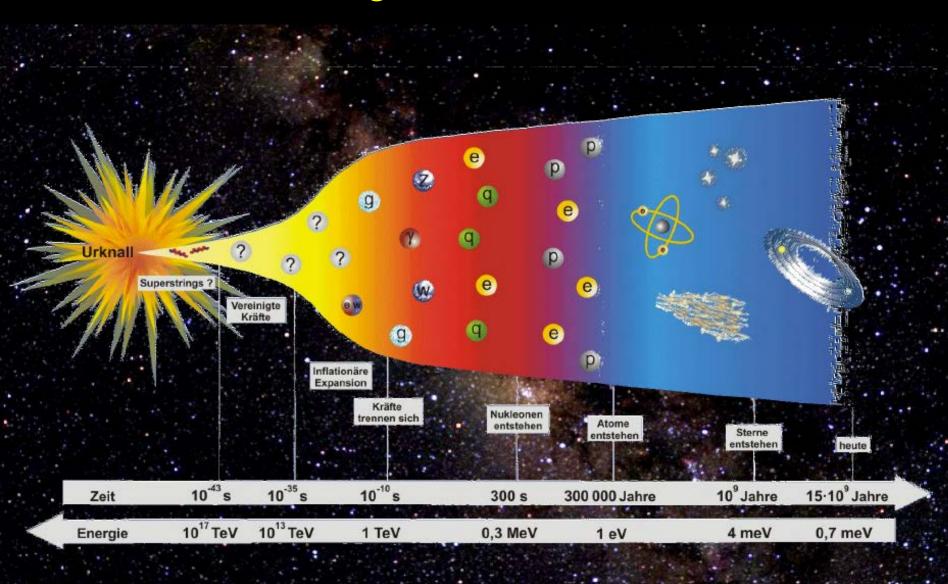
$$\Delta x = \frac{\hbar}{p}$$



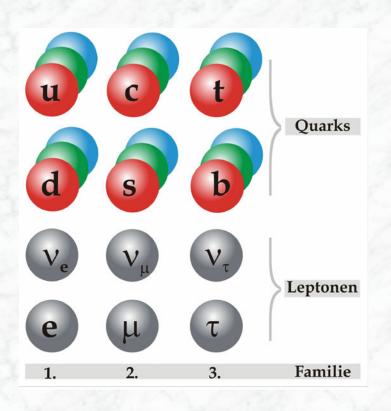
Die innere Struktur eines Protons

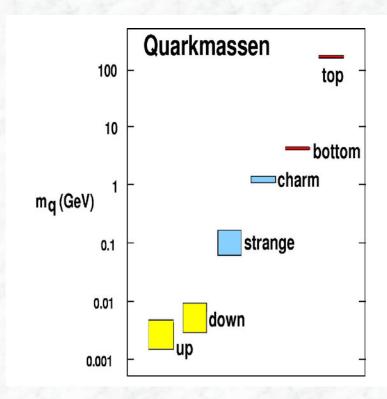
HERA-Beschleuniger, DESY Hamburg

Entwicklung unseres Universums



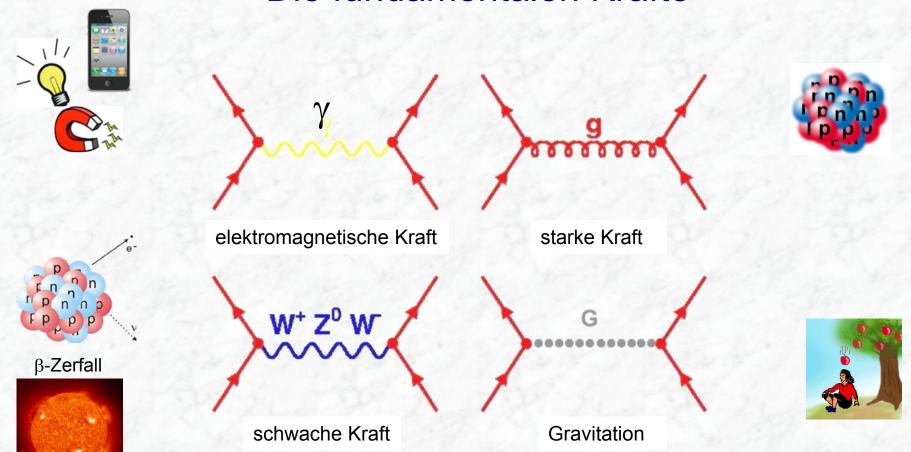
Die Bausteine der Materie: Quarks und Leptonen





- Quarks und Leptonen scheinen punktförmig zu sein, Ausdehnung < 10⁻¹⁸ m (Elementarteilchen)
- Die Masse der Quarks und Leptonen steigt mit der Familienzahl an $m_{\mu} \approx 200~m_e~m_{\tau} \approx 3.500~m_e$ Das schwerste Elementarteilchen: das Top-Quark $m_t \approx 340.000~m_e \approx m_{Gold-Atom}$

Die fundamentalen Kräfte

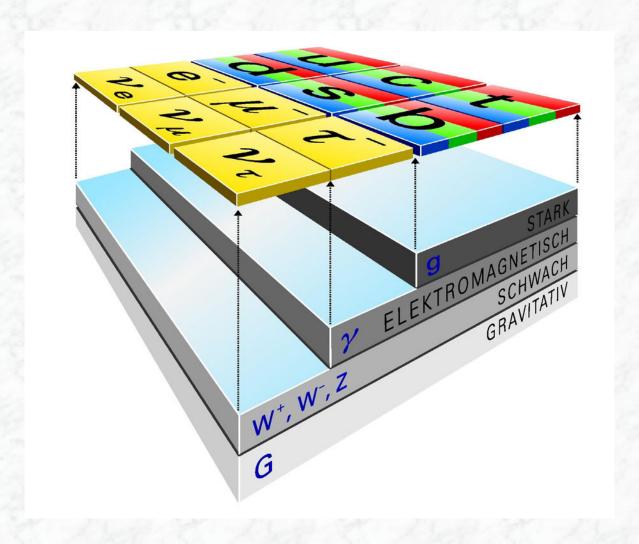


Austauschteilchen: Photon (γ), Gluonen (g), W- und Z-Teilchen (Im Bild der Quantenfeldtheorie: Wechselwirkung durch Austausch dieser Teilchen)

- Photon und Gluonen sind masselos: $m_{\gamma} = 0$, $m_{g} = 0$

- W- und Z-Teilchen sind sehr schwer: $m_W = 80.4 \text{ GeV}$, $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$

Welche Teilchen unterliegen welchen Kräften / Wechselwirkungen ?



Theoretische Beschreibung: Quantentheorie + Relativitätstheorie



→ Relativistische Quantentheorie:

P.A. M. Dirac (1929)

Die Verknüpfung der Quantentheorie mit der Relativitätstheorie führt zur Dirac-Gleichung

- Als Lösung der Dirac-Gleichung treten negative Energiezustände auf!
- Diese werden als Energiezustände von Antiteilchen interpretiert.
- Spin ½ für Elektronfelder enthalten.

Die elektromagnetische, starke und schwache Wechselwirkung werden heute durch Quantenfeldtheorien beschrieben.

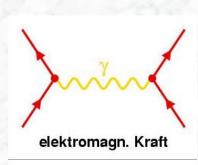
Prototyp der Quantenfeldtheorien: Quantenelektrodynamik (QED) (Theorie der el.magn. WW)

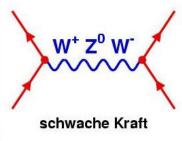
Die heutigen Theorien:











1962-1973: Glashow, Salam und Weinberg

Vereinigung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung

⇒ elektroschwache Wechselwirkung (Vorhersage der W- und Z-Teilchen)

Elektroschwache Wechselwirkung: γ, W[±], Z

$$\mathbf{m}_{\gamma} = \mathbf{0},$$

$$M_W = 80.426 \pm 0.034 \text{ GeV / } c^2$$

 $M_Z = 91.1875 \pm 0.0021 \text{ GeV / } c^2$

Theorie der starken Wechselwirkung: Quantenchromodynamik Nobelpreis für Physik 2004



05. Oktober 2004:

Als "wichtige theoretische Entdeckung" würdigte die Königlich-Schwedische Akademie in Stockholm am Dienstag die Arbeit der neu ernannten Preisträger. Gross, Politzer und Wilczek haben die besondere Eigenschaft der sogenannten "Starken Wechselwirkung" entdeckt. Diese Kraft wirkt auf der Ebene des absolut Kleinsten, der Welt der Quarks, die sich innerhalb atomarer Kerne befindet. Sie bestimmt den Zusammenhalt dieser kleinsten uns bekannten Materieteilchen und bestimmt damit doch die Eigenschaften aller Dinge, die uns im Alltag umgeben. Denn alle Materie besteht letztlich aus kleinsten Teilchen. Die "Starke Wechselwirkung" ist damit eine der vier fundamentalen Naturkräfte.

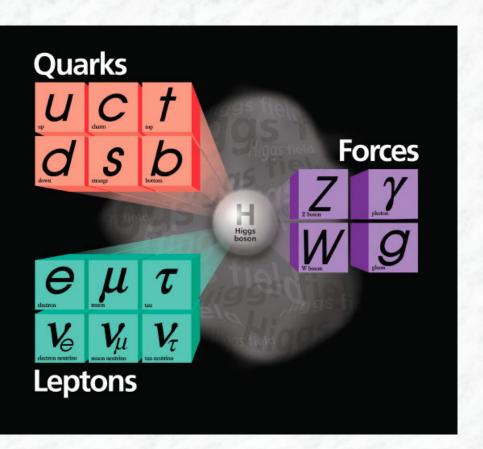
Beitrag zur Weltformel

Die Entdeckung der drei Forscher stammt aus dem Jahr 1973 und bildete die mathematische Grundlage für eine gänzliche neue Theorie, die ein wichtiger Zusatz zum physikalischen Standardmodell darstellt.

Damit hat sie unser Verständnis von der Welt vervollständigt, die neben der von den Preisträgern enträtselten Starken Wechselwirkung (zwischen kleinsten Teilchen, den Quarks) auch von der Schwachen Wechselwirkung und der elektromagnetischen Kraft zusammengehalten wird. "Dank der Entdeckung von David Gross, David Politzer und Frank Wilczek" ist die Physik der Erfüllung ihres großen Traums einen Schritt näher gekommen: eine einheitliche Theorie zu formulieren - eine Weltformel", würdigt die Jury die herausragende Leistung des Forschertrios. An dieser "großen vereinheitlichten Theorie", die die Wechselwirkungen aller Fundamentalkräfte miteinander erklären würde, beißen sich die klügsten Köpfe der Physik bisher die Zähne aus.

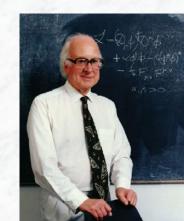
Die drei Wissenschaftler erhalten den Preis zu gleichen Teilen. Der 63jährige Gross arbeitet am Kavli Institut für theoretische Physik der Universität von Kalifornieren in Santa Barbara. Politzer ist am California Institute of Technology aktiv, und der 53 Jahre alte Wilczek arbeitet am renommierten MIT, dem Massachusetts Institute of Technology in Cambridge vor den Toren Bostons.

Das Problem der Masse



- Theoretische Beschreibung (Quantenfeldtheorien)
 - → masselose Teilchen
- Ein neues Teilchenfeld (Higgs-Feld) wird postuliert, durchdringt Vakuum
- Masse wird erzeugt durch Wechselwirkung der Teilchen mit diesem Feld
- Vorhersage: Neues Teilchen, das sog. Higgs-Teilchen

Vorgeschlagen im Jahre 1964 von Prof. P. Higgs (Univ. Edinburgh) und anderen Theoretischen Physikern: [R. Brout, F. Englert, G. Guralnik, C. Hagen, P. Higgs, T. Kibble]

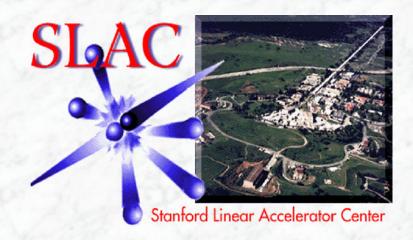


Forschungseinrichtungen



Deutsches-Elektronen-Synchrotron (DESY), Hamburg







Conseil-Européenne-pour la-Recherche-Nucléaire (CERN), CH/F

Der größte Beschleunigerring am CERN in Genf (Umfang 27 km)



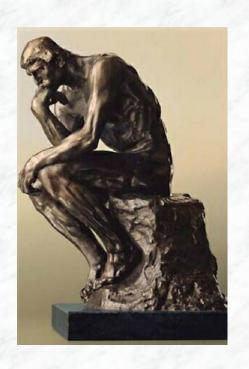






Die Offenen Fragen

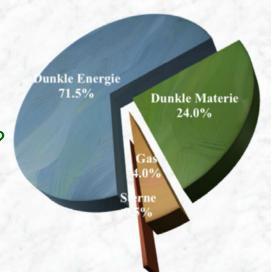




Wichtige offene Fragen der Physik

1. Masse

Was ist der Ursprung der Masse? Existiert das Higgs Teilchen?

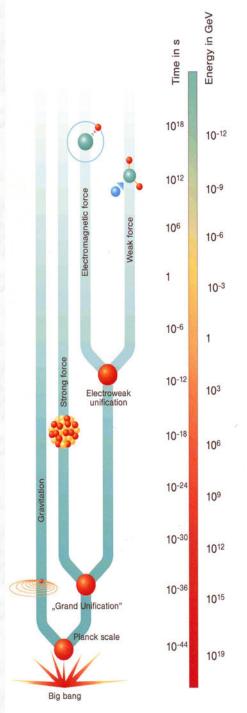


2. Vereinheitlichung

- Können die Wechselwirkungen vereinheitlicht werden?
- Gibt es neue Materiezustände,
 z.B. in Form von supersymmetrischen Teilchen?
 Stellen diese die Dunkle Materie im Universum dar?

3. Generationenproblem

- Warum gibt es drei Familien von Teilchen?
- Was ist die Ursache der Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie?



1.2 Gegenstand der Kernphysik

- Studium der stabilen und angeregten Atomkerne
- Wechselwirkung der Atomkerne untereinander
- Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen und Atomkernen

Ziel: Zurückführung auf die elementaren Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen

Schwierigkeiten:

- Vielteilchensystem
- Überlagerung dreier Wechselwirkungen (starke, el.magnetische und schwache Wechselwirkung)
- Störungstheoretische Berechnung der starken WW bei Abständen der Atomkerne (~ 10⁻¹⁵ m) nicht möglich.

 \rightarrow

Parametrisierungen (effektive Theorien) Kernmodelle (Vielteilchensysteme, Näherungsverfahren)

Wichtige Meilensteine auf dem Weg zur Kernphysik:

1896	Entdeckung der Radioaktivität durch Henri Becquerel (bei Luminoszenzuntersuchungen an Uransalzen, Schwärzung von lichtabgeschirmten Photoplatten (α , β -Strahlung)				
1898	Entdeckung der Elemente Polonium und Radium (1902) durch Maria Sklodowska/Curie und Pierre Curie				
1900	Entdeckung eines magnetisch nicht ablenkbaren Anteils radioaktiver Strahlung (γ-Strahlung) durch P.U. Villard				
1902	Identifizierung der β-Strahlen als Elektronen durch H. Bequerel				
1909	Identifizierung der α-Strahlen als ionisierte Helium-Atome durch E. Rutherford und Royds (Ablenkung im Magnetfeld ≠ Elektronen, optische Spektren nach e⁻-Einfang = He-Spektrum)				
1911	Rutherford-Experiment: Untersuchung der Ablenkung von α-Strahlung an einer Goldfolie (Mitarbeiter: Geiger, Marsden) → Entdeckung des Atomkerns				
1919	Erste künstliche Kernumwandlungen durch E. Rutherford: α + ¹⁴ N \rightarrow ¹⁷ O + p bei der Streuung von α -Teilchen an leichten Kernen (\neq elastische Streuung), Identifizierung des Protons (pos. geladenes Teilchen, rel. große Reichweite)				
1932	Entdeckung des Neutrons durch J. Chadwick				

Technische Bedeutung der Kernphysik:

- Energiegewinnung
- Medizinische Diagnostik und Therapie
- Spurenelementanalysen
- Geologische und archäologische Datierung
- Entwicklung experimenteller Methoden (Beschleuniger, Detektoren, ns-Elektronik, Koinzidenzmessungen,....)
-

1.3 Einheiten

siehe Vorlesungsmitschrift

Formulas and Constants

[aus Ref. 4]

Particle Data

Mass in MeV/c², lifetime in seconds, charge in units of the proton charge.

Leptons (spin 1/2)

Generation	Flavor	Charge	Mass*	Lifetime	Principal Decays
first	e (electron)	-1	0.510999	∞	_
	v_{ε} (e neutrino)	0	0	∞	_
second	μ (muon)	-1	105.659	2.19703×10^{-6}	$ev_{\mu}\overline{v}_{e}$
	ν_{μ} (μ neutrino)	0	0	∞	_
third	τ (tau)	-1	1776.99	2.91×10^{-13}	$ev_{\tau}\overline{v}_{e}, \mu v_{\tau}\overline{v}_{\mu}, \pi^{-}v_{\tau}$
	ν_{τ} (τ neutrino)	0	0	∞	-

^{*}Neutrino masses are extremely small, and for most purposes can be taken to be zero; for details see Chapter 11.

Quarks (spin 1/2)

Generation	Flavor	Charge	Mass*
first	d (down)	-1/3	7
	и (up)	2/3	3
second	s (strange)	-1/3	120
	c (charm)	2/3	1200
third	b (bottom)	-1/3	4300
	t (top)	2/3	174000

^{*}Light quark masses are imprecise and speculative; for effective masses in mesons and baryons, see Chapter 5.

Mediators (spin 1)

Force	Mediator	Charge	Mass*	Lifetime	Principal Decays
Strong	g (8 gluons)	0	0	∞	-
Electromagnetic	γ (photon)	0	0	∞	į -
Weak	W [±] (charged)	±1	80,420	3.11×10^{-25}	$e^+\nu_e$, $\mu^+\nu_\mu$, $\tau^+\nu_\tau$, $cX \to \text{hadrons}$
	Z ⁰ (neutral)	0	91,190	2.64×10^{-25}	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-, q\overline{q} \rightarrow \text{hadrons}$

Baryons (spin 1/2)

Baryon	Quark Content	Charge	Mass	Lifetime	Principal Decays
$N \left\{ p \right\}$	uud	1	938.272	∞	_
$\binom{n}{n}$	udd	0	939.565	885.7	$pe\overline{\nu}_e$
Λ	uds	0	1115.68	2.63×10^{-10}	pπ -, nπ 0
Σ^+	uus	1	1189.37	8.02×10^{-11}	$p\pi^0$, $n\pi^+$
Σ^0	uds	0	1192.64	7.4×10^{-20}	Λγ
Σ^-	dds	-1	1197.45	1.48×10^{-10}	$n\pi^-$
Ξ_0	uss	0	1314.8	2.90×10^{-10}	$\Lambda \pi^0$
Ξ	dss	-1	1321.3	1.64×10^{-10}	$\Lambda\pi^-$
Λ_c^+	udc	1	2286.5	2.00×10^{-13}	ρΚπ, Λππ, Σππ

Baryons (spin 3/2)

Baryon	Quark Content	Charge	Mass	Lifetime	Principal Decays
Δ	uuu, uud, udd, ddd	2,1,0,-1	1232	5.6×10^{-24}	Νπ
Σ^*	uus, uds, dds	1,0,-1	1385	1.8×10^{-23}	Λπ, Σπ
Ξ*	uss, dss	0,-1	1533	6.9×10^{-23}	$\Xi\pi$
Ω-	SSS	-1	1672	8.2×10^{-11}	ΛK^- , $\Xi \pi$

Pseudoscalar Mesons (spin 0)

				, , ,	
Meson	Quark Content	Charge	Mass	Lifetime	Principal Decays
π^{\pm}	ud, du	1,-1	139.570	2.60×10^{-8}	$\mu \nu_{\mu}$
π^0	$(u\overline{u}-d\overline{d})/\sqrt{2}$	0	134.977	8.4×10^{-17}	γγ
K^{\pm}	us, sū	1,-1	493.68	1.24×10^{-8}	$\mu \nu_{\mu}$, $\pi \pi$, $\pi \pi \pi$
K^0, \overline{K}^0	$d\bar{s}, s\bar{d}$	0	497.65	$K_S^0: 8.95 \times 10^{-11}$	ππ
K , K	u s, s u	U	497.03	$K_L^0: 5.11 \times 10^{-8}$	$\pi e \nu_e$, $\pi \mu \nu_\mu$, $\pi \pi \pi$
η	$(u\overline{u}+d\overline{d}-2s\overline{s})/\sqrt{6}$	0	547.51	5.1×10^{-19}	γγ, πππ
η'	$(u\overline{u} + d\overline{d} + s\overline{s})/\sqrt{3}$	0	957.78	3.2×10^{-21}	ηππ, ργ
D^\pm	cd̄, dc̄	1,-1	1869.3	1.04×10^{-12}	$Kππ$, $Kμν_μ$, $Keν_ε$
D^0, \overline{D}^0	с и , и с	0	1864.5	4.1×10^{-13}	$K\pi\pi$, Kev_e , $K\mu v_\mu$
D_s^{\pm}	cs, sc	1,-1	1968.2	5.0×10^{-13}	$\eta \rho, \phi \pi \pi, \phi \rho$
B^{\pm}	и \overline{b} , $b\overline{u}$	1,-1	5279.0	1.6×10^{-12}	$D^*\ell v_\ell$, $D\ell v_\ell$, $D^*\pi\pi\pi$
B^0 , \overline{B}^0	$d\overline{b}$, $b\overline{d}$	0	5279.4	1.5×10^{-12}	$D^*\ell v_\ell$, $D\ell v_\ell$, $D^*\pi\pi$

Vector Mesons (spin 1)

Meson	Quark Content	Charge	Mass	Lifetime	Principal Decays
ρ	$u\overline{d}$, $(u\overline{u} - d\overline{d})/\sqrt{2}$, $d\overline{u}$	1,0,-1	775.5	4×10^{-24}	ππ
K^*	us, ds, sd, su	1,0,-1	894	1×10^{-23}	Κπ
ω	$(u\overline{u}+d\overline{d})/\sqrt{2}$	0	782.6	8×10^{-23}	πππ, πγ
ψ	$c\overline{c}$	0	3097	7×10^{-21}	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, 5\pi, 7\pi$
D^*	cd, cū, uc, dc	1,0,-1	2008	3×10^{-21}	$D\pi$, $D\gamma$
Υ	$b\overline{b}$	0	9460	1×10^{-20}	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-$

Fundamental Constants

Planck's constant:
$$\hbar = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$= 6.58212 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

Speed of light:
$$c = 2.99792 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Mass of electron:
$$m_e = 9.10938 \times 10^{-31} \text{kg} = 0.510999 \text{ MeV/c}^2$$

Mass of proton:
$$m_p = 1.67262 \times 10^{-27} \text{kg} = 938.272 \text{ MeV/c}^2$$

Electron charge (magnitude):
$$e = 1.60218 \times 10^{-19} \, \text{C}$$

$$= 4.80320 \times 10^{-10} \text{ esu}$$

Fine structure constant:
$$\alpha = e^2/\hbar c = 1/137.036$$

Bohr radius:
$$a = \hbar^2/m_e e^2 = 5.29177 \times 10^{-11} \text{ m}$$

Bohr energies:
$$E_n = -m_e e^4 / 2\hbar^2 n^2 = -13.6057 / n^2 \text{ eV}$$

Classical electron radius:
$$r_e = e^2/m_e c^2 = 2.81794 \times 10^{-15} \text{ m}$$

QED coupling constant:
$$g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = 0.302822$$

Weak coupling constants:
$$g_w = g_{\varepsilon} / \sin \theta_w = 0.6295$$
;

$$g_z = g_w/\cos\theta_w = 0.7180$$

Weak mixing angle:
$$\theta_w = 28.76^{\circ} (\sin^2 \theta_w = 0.2314)$$

Strong coupling constant:
$$g_s = 1.214$$

Conversion Factors

$$1 \text{ Å} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ eV} = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ MeV/}c^2 = 1.78266 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

1 Coulomb =
$$2.99792 \times 10^{-9}$$
 esu

TABLE 1.2a Conventional Mass, Length, Time Units, and Positron Charge in Terms of $\hbar = c = 1$ Energy Units

Conversion Factor	$\hbar = c = 1$ Units	Actual Dimension GeV c ² <u>ħc</u> GeV	
$1 \text{ kg} = 5.61 \times 10^{26} \text{ GeV}$	GeV		
$1 \text{ m} = 5.07 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1}$	${\rm GeV^{-1}}$		
$1 \text{ sec} = 1.52 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1}$	GeV^{-1}	$\frac{\hbar}{\mathrm{GeV}}$	
$e = \sqrt{4\pi\alpha}$		$(\hbar c)^{1/2}$	

TABLE 1.2b

Some Useful Conversion Factors

1 TeV =
$$10^3$$
 GeV = 10^6 MeV = 10^9 KeV = 10^{12} eV
1 fermi = 1 F = 10^{-13} cm = 5.07 GeV⁻¹
(1 F)² = 10 mb = 10^4 μ b = 10^7 nb = 10^{10} pb
(1 GeV)⁻² = 0.389 mb

1.4 Wirkungsquerschnitte

siehe Vorlesungsmitschrift

Klassische Interpretation des Wirkungsquerschnitts als Fläche:

- Jedem Streuzentrum wird eine Fläche σ zugeordnet
- Eine Reaktion soll stattfinden, wenn das einlaufende Teilchen, das gegenüber σ eine kleine Ausdehnung haben soll, in die abgedeckte Fläche trifft.

Gesamtfläche des Strahlquerschnitts: A Bedeckte Fläche: $N_b \sigma$

- Zahl der einlaufenden Teilchen pro Zeiteinheit: Φ_a A
- Zahl der Reaktionen pro Zeiteinheit:

$$\dot{N} = \phi_a A \left(\frac{N_b \sigma}{A} \right) = \phi_a N_b \sigma$$

- Flächenverhältnis
- Wahrscheinlichkeit für Reaktion / Treffen

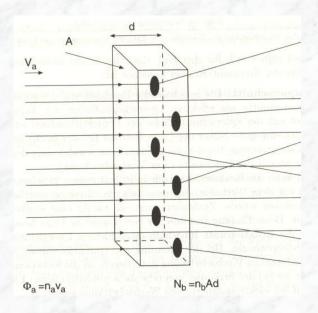


Abb. 1.1: Skizze zur Messung des geometrischen Reaktionsquerschnitts (aus Ref. [3])

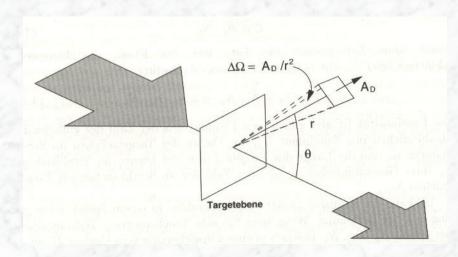


Abb. 1.2: Skizze zur Illustration des differentiellen Wirkungsquerschnitts (aus Ref. [3])

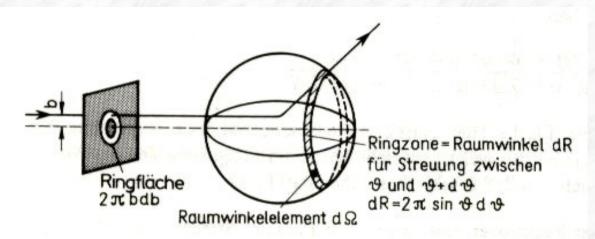


Abb. 1.3: Skizze zur Illustration des differentiellen Wirkungsquerschnitts, Beziehung zwischen Stoßparameter und Streuwinkel (aus Ref. [3])

1.5 Relativistische Kinematik

1.5.1 Lorentz-Transformation

Grundlage: Spezielle Relativitätstheorie

→ In jedem Inertialsystem gelten die gleichen physikalischen Gesetze;

Inertialsystem: System in dem das 1. Newtonsche Gesetz (Trägheitsgesetz) gilt

Betrachte zwei Inertialsysteme S und S´, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v zueinander bewegen (o.b.d.A: Bewegung in x-Richtung)

Übergang zwischen Bezugssystemen wird durch die Lorentz-Transformation beschrieben:

$$x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma (t - \frac{v}{c^2} \cdot x)$$

wobei:

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}}\right)^2}}$$

Inverse Transformation:

$$x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2} \cdot x')$$

Konsequenzen aus der Lorentz-Transformation

- (i) Relativität der Gleichzeitigkeit
- (i) Längenkontraktion
- (ii) Zeitdilatation
- (iii) Nicht-lineare Addition von Geschwindigkeiten

(i) Relativität der Gleichzeitigkeit

- Gleichzeitigkeit hängt von der Bewegung der Bezugssysteme ab;
- Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, sind im anderen Bezugssystem nicht gleichzeitig
- Zwei gleichzeitige Ereignisse in S: t, x_A, y, z t, x_B, y, z
- Für die Zeiten t' für die Ereignisse A und B ergibt sich im System S':

$$\mathbf{t}_{\mathbf{A}}' = \gamma \cdot (\mathbf{t} - \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}^2} \cdot \mathbf{x}_{\mathbf{A}})$$

$$t_{\rm B}' = \gamma \cdot (t - \frac{v}{c^2} \cdot x_{\rm B})$$

Hieraus ergibt sich:

$$\mathbf{t}_{\mathrm{A}}' = \mathbf{t}_{\mathrm{B}}' + \gamma \cdot \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}^{2}} \cdot (\mathbf{x}_{\mathrm{B}} - \mathbf{x}_{\mathrm{A}})$$

(ii) Längenkontraktion

Betrachte einen Stab der Länge L´ im System S´
 (Das System S´ sei das Ruhesystem des Stabes)

•
$$L' = x_2' - x_1'$$

• Betrachte die Koordinaten, und damit die Länge des Stabes im System S:

$$\mathbf{x}' = \gamma \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{t})$$
 \Rightarrow $\mathbf{x}'_1 = \gamma \mathbf{x}_1 - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$ $\mathbf{x}'_2 = \gamma \mathbf{x}_2 - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$

Hieraus ergibt sich

$$L = x_2 - x_1 = \frac{x_2'}{\gamma} - \frac{x_1'}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} (x_2' - x_1') = \frac{L'}{\gamma}$$

 \rightarrow Das bewegte Objekt erscheint um einen Faktor γ in der Länge verkürzt, bezogen auf das Ruhesystem des Objekts

(iii) Zeitdilatation

- Eine Uhr in dem bewegten System laufe für einen Zeitraum T´;
 Welches Zeitintervall ergibt die Messung im System S?
- o.B.d.A: $t_1'=0$ bis $t_2'=T'$ $\Delta t'=T'$ Uhr sei im Ursprung von S´, d.h. x'=0
- Lorentztransformation: $t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$

$$\Rightarrow t_1 = \gamma \cdot (0 + \frac{v}{c^2} \cdot 0) = 0$$

$$\Rightarrow t_2 = \gamma \cdot (T' + \frac{v}{c^2} \cdot 0) = \gamma \cdot T'$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \cdot T'$$

Die Uhr im System S durchläuft ein um den Faktor γ längeres Zeitintervall, oder: "bewegte Uhren gehen langsamer"

Wichtig für die Teilchenphysik: Zeitdilatation relativistischer Teilchen

(iv) Nicht-lineare Addition von Geschwindigkeiten

Ein Teilchen bewege sich mit der Geschwindigkeit u´relativ zu S´ in x´-Richtung;
 Welche Geschwindigkeit u hat es im Bezugssystem S?

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = u = \frac{\gamma(\Delta x' + v \cdot \Delta t')}{\gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \cdot \Delta x')} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\Delta x'}{\Delta t'}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}}$$
klassisch: $u = u' + v$
relativistische
Korrektur: $k := \frac{1}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}}$

• Spezialfälle:
$$u'=c \qquad \to \qquad u=\frac{c+v}{1+v'_c}=c\cdot\frac{1+v'_c}{1+v'_c}=c$$

$$v=c$$

$$v=c$$

$$u'=c \qquad \to \qquad u=c\cdot\frac{2}{2}=c$$

→ Die Lichtgeschwindigkeit stellt in allen Inertialsystemen die maximale Geschwindigkeit dar.

1.5.2 Vierervektoren

(i) Orts- und Zeit-Vektor:

Die Lorentz-Transformation koppelt Orts- und Zeitkoordinaten, Zusammenfassung der vier Koordinaten in einen Raum-Zeit-Vektor:

$$x^{\mu} := \begin{pmatrix} c \cdot t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x^{0} &= c \cdot t \\ x^{1} &= x \\ x^{2} &= y \\ x^{3} &= z \end{aligned}$$

Transformation:

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta \cdot x^1)$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta \cdot x^0)$$

$$x^{2'} = x^2$$

$$x^{3'} = x^3$$
wobei $\beta := \frac{v}{c}$

Kompakte Schreibweise:

(Einstein'sche Summenkonvention)

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu} \cdot x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \cdot x^{\nu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

Explizite Rechnung für x⁰

$$x^{0'} = (c \cdot t') = c \cdot \gamma \cdot (t - \frac{v}{c^2} x^1)$$
$$= \gamma \cdot (c \cdot t - \frac{v}{c} \cdot x^1)$$
$$= \gamma \cdot (x^0 - \beta \cdot x^1)$$

 Vierervektor a^μ: Vier-komponentiges Objekt, das sich in derselben Weise wie x^μ transformiert

$$a^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}$$

wobei Λ die Lorentz-Transformationsmatrix darstellt

Skalarprodukt von Vierervektoren:

$$a^{\mu} \cdot b_{\mu} = a^{0}b^{0} - a^{1}b^{1} - a^{2}b^{2} - a^{3}b^{3}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

• Beträge von Vierervektoren: $a^2 := a \cdot a = (a^0)^2 - \vec{a} \cdot \vec{a}$

$$a^2 > 0$$
 a^{μ} zeitartig $a^2 < 0$ a^{μ} raumartig $a^2 = 0$ a^{μ} lichtartig

Lorentz-Invarianten: Kombinationen von Koordinaten, die invariant unter Lorentz-Transformationen sind

Beispiel:

$$I = (x^{0})^{2} - (x^{1})^{2} - (x^{2})^{2} - (x^{3})^{2}$$
$$= (x^{0'})^{2} - (x^{1'})^{2} - (x^{2'})^{2} - (x^{3'})^{2}$$

(Analog zur Invarianz von $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ im 3-dimensionalen Raum unter Rotationen)

Metrik:
$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad I = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} \\ = x_{\nu} \cdot x^{\nu}$$

wobei
$$x_{\mu} := g_{\mu\nu} x^{\nu}$$
 kovarianter Vektor

kontravariant: (x^0, x^1, x^2, x^3)

kovariant: $(x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

Übergang: kovariant
$$\leftarrow \rightarrow$$
 kontravariant $x_{\mu} = g_{\mu\nu} \cdot x^{\nu}$
$$x^{\mu} = g^{\mu\nu} \cdot x_{\nu}$$

$$g^{\mu\nu} = (G)^{-1} = g_{\mu\nu} \quad \text{(Diagonal form)}$$

1.5.3 Tensoren

Verallgemeinerung von Vierervektoren

(n Indices) transformiert sich mit n Λ -Matrizen **S**μν ...τ Ein Tensor n-ter Stufe

Tensor 0. Stufe: Skalar

Tensor 1. Stufe: Vierervektor

Tensor 2. Stufe: 16-komponentiges Objekt S^{μν}

Transformation:

$$S^{\mu\nu'} = \Lambda^{\mu}_k \cdot \Lambda^{\nu}_{\sigma} \cdot S^{k\sigma}$$

Tensor 3. Stufe: 64-komponentiges Objekt $T^{\mu\nu\lambda}$

Transformation:

$$T^{\mu\nu\lambda'} = \Lambda^{\mu}_{k} \cdot \Lambda^{\nu}_{\sigma} \cdot \Lambda^{\lambda}_{\tau} \cdot T^{k\sigma\tau}$$

Konstruktion von kovarianten und gemischten Tensoren:

$$S^{\mu}_{\nu} := g_{\nu\lambda} \cdot S^{\mu\lambda}$$

$$S^{\mu}_{\nu} := g_{\nu\lambda} \cdot S^{\mu\lambda}$$
$$S_{\mu\nu} := g_{\mu k} \cdot g_{\nu\lambda} \cdot S^{k\lambda}$$

(Das Produkt zweier Tensoren ist wieder ein Tensor)

1.5.4 Energie-Impuls Vektor

Die relativistische Energie und der Dreierimpuls bilden einen Vierervektor

$$\mathbf{P}^{\mu} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{\mathbf{z}} \\ \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p}_{\mathbf{y}} \\ \mathbf{p}_{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\gamma} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{\gamma} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

Relativistische Invariante:

$$\begin{split} P_{\mu} \cdot P^{\mu} &= \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^2 \\ &= \gamma^2 m^2 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) \\ &= \gamma^2 m^2 c^2 \frac{1}{\gamma^2} = m^2 c^2 \end{split}$$

• Energie-Term:
$$E = \gamma \cdot mc^2 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Näherung für kleine Werte von v/c:
$$E = mc^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \stackrel{\rightharpoonup}{\longrightarrow} \right\}$$
$$= mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^2} + \stackrel{\rightharpoonup}{\longrightarrow}$$

• Relativistische Energie/Impulsbeziehungen:
$$\vec{p} = \gamma \cdot m \cdot \vec{v}$$

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}$$

$$\beta = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{c}}{E}$$

$$E = \gamma \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{c}^2$$

Beispiel: Proton E = 10 GeV
$$\gamma = \frac{10 \text{ GeV}}{0.938 \text{ GeV}} = 10.66$$

$$\beta = \frac{\sqrt{10^2 - 0.938^2}}{10} = 0.996$$